УДК 65.012.122

Теория инженерного эксперимента: Учеб.пособие / Г.М.Тимошенко, П.Ф.Зима. - К.: УМК ВО, 1991. - 124 с.

Приведены основные сведения об объектах исследования и их моделях из теории подобия, обработки данных и планирования эксперимента. Показано, в каком виде обрабатывать результаты эксперимента для получения обобщающих выводов, справедливых для частного случая и группы объектов или явлений. Изложена методика получения достоверных характеристик на основе данных, имеющих погрешности. Рассмотрены приемы построения матриц полного и дробного факторных экспериментов планов первого и второго порядка, основные этапы экстремального эксперимента. Материал проиллюстрирован примерами и вопросами для самопроверки. Данное пособие может быть рекомендовано для организации самостоятельной работы студентов специальности 17.01 "Горные машины и комплексы".

Ил.21, Табл.24, Библиогр.: 8 назв.

Рецензенты: В.И.Груба
В.В.Мирошниченко

ISBN 5-7763-0376-1

Теория инженерного эксперимента - важная часть дисциплины "Основы научных исследований".

Эксперимент - метод познания действительности в контролируемых и управляемых условиях.

Теория эксперимента включает три основных направления:

первое - подобие и моделирование. Отвечает на вопросы, какие величины следует измерять во время эксперимента и в каком виде обрабатывать результаты, чтобы выводы оказались справедливыми не только для данного частного случая, но и для группы объектов или явлений;

второе - статистическая обработка данных эксперимента. Представляет собой методику получения достоверных характеристик на основе данных, имеющих погрешности;

третье - планирование эксперимента. Включает совокупность процедур, использование которых при проведении эксперимента позволяет с минимальными затратами установить искомые зависимости.

Первые научные исследования по вопросам подобия выполнены И.Ньютоном. Большой вклад в развитие данного направления внесли труды зарубежных ученых Бертрана, Рейнольдса, Букингема и отечественных - А.Федермана, Т.А.Афанасьевой-Эренфест, М.В.Кирпичева, А.А.Гухмана, Л.И.Седова, В.А.Веникова.

Основы статистической обработки экспериментальных данных заложили Бернулли, Лаплас, Пуассон, П.Л.Чебышев, А.А.Марков и А.М.Ляпунов.

Теория планирования эксперимента начала формироваться в 40 - 50-х годах нашего столетия в работах Фишера, Бокса. Серьезный вклад в эту теорию внесли отечественные ученые В.В.Налимов, Г.К.Круг, Ю.П.Адлер.

Каждое из этих направлений является обширной и развивающейся областью знаний, по которому имеется большой объем фундаментальных исследований, глубокое освоение которых требует значительных затрат времени и зачастую специальной математической подготовки. Учитывая реальные условия изложения курса "Основы научных исследований" студентам специальности "Горные машины и комплексы", остановимся только на важнейших с практической точки зрения моментах теории подобия и моделирования, статистической обработки данных и планирования эксперимента. Вместе с тем считаем необходимым изложение построить так, чтобы в максимальной мере облегчить студентам изучение материала курса, особенно при организации самостоятельной работы, и чтобы полученных знаний оказалось достаточно для решения реальных задач прикладных научных исследований.

Для более глубокого освоения основных положений и разъяснения соответствующих вопросов изложение проиллюстрировано достаточным числом примеров. В конце разделов помещены контрольные вопросы и задачи для организации самопроверки глубины изучения материала.

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Под обьектом исследования понимают условно изолированное целое, содержащее совокупность процессов и средств их реализации. К средствам реализации относятся устройства контроля и управления, а также связи между ними и объектом.

Полностью изолированных объектов в природе не существует. А для всестороннего исследования в соответствии с диалектикой необходим учет всех связей. Однако чтобы не запутаться в бесконечных связях, исследователь должен уметь выделить главное, абстрагироваться от второстепенного и, таким образом, представить объект исследования как условно изолированное целое.

I.I. Модель "черный ящик"

В инженерном эксперименте часто для объекта исследования используется модель "черного ящика", которую представляют в виде прямоугольника с выходными и входными стрелками /рис.I.I/.

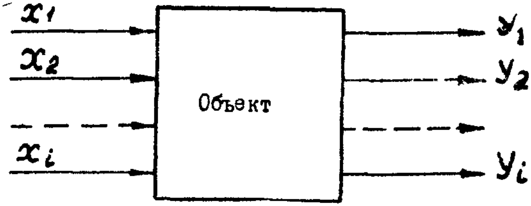


Рис.I.I. Кибернетическая модель "черный ящик"

Входные стрелки соответствуют входным величинам (x), а выходные - выходным величинам (y). Последние характеризуют состояние объекта исследования. Первыми обозначается все, что оказывает влияние на выходные величины. Предполагается, что внутренняя структура объекта и сущность связей между входными и выходными величинами исследователю неизвестны, о них он судит по тому, какие значения принимают выходные величины при данных значениях входных.

В теории эксперимента входные величины обычно называют факторами, а выходные - параметрами, откликами, реакциями и целевыми функциями.

Правильный выбор параметров и факторов в значительной степени предопределяет успех исследования. Строго формализованной методики их выбора нет. Здесь многое зависит от опыта экспериментатора, глубины проникновения в сущность объекта исследования, знаний теории эксперимента.

Эксперимент ставят либо с целью аппроксимации, установления /проверки/ существа связей для данного объекта между параметрами и факторами, либо с целью оптимизации, выбора наилучшего по каким-либо соображениям состояния. В последнем случае выходная величина называется параметром или критерием оптимизации.

1.2. Параметры, предъявляемые к ним требования

В инженерном эксперименте в качестве параметров принимаются экономические величины /приведенные затраты, себестоимость, производительность труда и т.д./ или технические /коэффициент полезного действия, расход энергии, производительность машины, давление, напряжение и т.д./.

К параметру предъявляются следующие основные требования.

Параметр должен быть количественным и оцениваться числом. Для качественных параметров используются ранговые и условные показатели оценки.

Параметр должен допускать проведение эксперимента при любом сочетании факторов. Недопустимо, чтобы при каком-либо сочетании произошел взрыв, поломка и т.д.

Данному сочетанию факторов с точностью до погрешности должно соответствовать одно значение параметра.

Параметр должен быть универсальным, т.е. характеризовать объект всесторонне.

Желательно, чтобы параметр имел простой экономический или физический смысл, просто и легко вычислялся.

Рекомендуется, чтобы параметр был единственным. Исследовать объект, построить математические зависимости можно для каждого параметра, оптимизация же может выполняться только по одному. Если параметров несколько, то рассматриваются компромиссные задачи. Выбирается основной, с точки зрения исследователя, параметр, а остальные используются для наложения соответствующих ограничений на объект. Идут по пути замены одной задачи другими. По возможности используется метод установления обобщенного параметра оптимизации [1].

I.3. Факторы и предъявляемые к ним требования

Факторы можно разделить на следующие три группы: в первую входят контролируемые и управляемые, которые можно измерять и устанавливать на соответствующем уровне по желанию экспериментатора /подача и частота вращения вала насоса, напряжение питающей сети и т.д./. Во вторую группу входят контролируемые, но неуправляемые величины. Например, температура окружающей среды, солнечная радиация и т.д. В третью группу включаются неконтролируемые и неуправляемые входные параметры. Примером их могут быть воздействия, связанные со старением материала деталей объекта.

Фактором является любая величина, влияющая на параметр и способная изменяться независимо от других. Например, принято решение экспериментально проверить зависимость потерь давления в трубопроводе от определяющих факторов. Из гидравлики [2] известно, что потери давления Δp зависят от плотности жидкости ρ, коэффициента потерь по длине λ, длины l и диаметра d трубопровода, а также от средней скорости v. В рассматриваемом случае параметром являются потери давления. На них оказывают влияние пять величин: ρ, λ, l, d и v. Плотность, длина, диаметр и скорость удовлетворяют обоим требованиям, предъявляемым к факторам: влияют на параметр и могут изменяться независимо от других. Коэффициент λ влияет на параметр, но является функцией диаметра / $\lambda = 0{,}021/d^{0,3}$/. Он не удовлетворяет требованию независимости изменения и поэтому в качестве фактора одновременно с диаметром быть не может. В рассмотренном случае параметр Δp является функцией не пяти, а только четырех факторов: ρ, l, d и v.

В теории эксперимента кроме независимости к факторам предъявляются следующие требования: операциональности, совместимости, управляемости, точности и однозначности.

Факторы должны быть операционально определенными величинами. Если в качестве фактора выбрано давление, то необходимо установить, в какой точке оно будет измеряться и с помощью какого прибора. Совместимость факторов означает, что при всех сочетаниях их уровней эксперимент можно поставить и он будет безопасным.

Управляемость, как указывалось ранее, означает, что экспериментатор может устанавливать значение уровня фактора по своему усмотрению.

Точность установления факторов должна быть существенно /по крайней мере на порядок/ выше точности определения параметра.

Однозначность означает непосредственность воздействия фактора на объект исследования. Можно использовать и сложные комбинации факторов /критерии подобия/.

Факторы, как и параметры, должны быть количественными.

1.4. Основные свойства объекта исследования

Объект исследования характеризуется рядом свойств. Важнейшие из них, к которым будем обращаться при последующем изложении, - сложность, полнота априорной информации, управляемость и воспроизводимость /рис.1.2/.

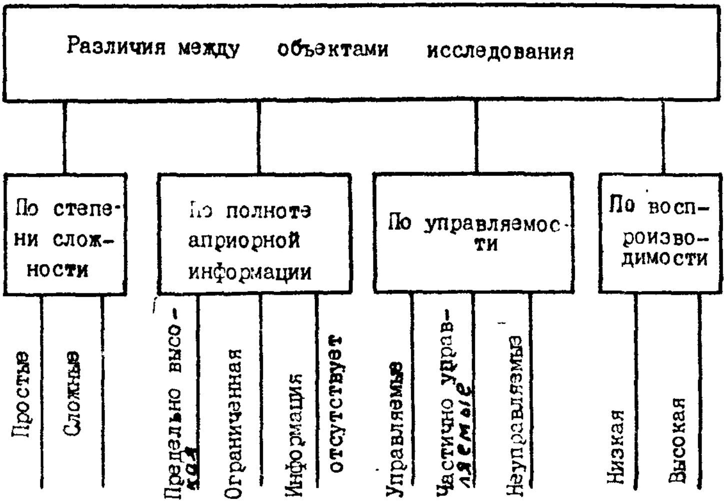


Рис.1.2. Классификация объектов исследования

Сложность объекта

Сложность объекта - число состояний, которые в соответствии с целью исследования и принятой техникой эксперимента можно различать.

Один и тот же объект в зависимости от цели эксперимента может характеризоваться различной сложностью. Например, если нас интересует возможность обеспечения откачки притока насосом вспомогательного водоотлива, то число возможных состояний равно двум - "да" или "нет". Если же нас интересует зависимость напора того же насоса от подачи, то для построения напорной кривой необходимо, предположим, пять экспериментальных точек. В первом случае сложность $C = 2$, а во втором $C = 5$.

Если необходимо знать, как изменяется напор с изменением подачи и одновременно с изменением частоты вращения, которая может принимать значения, соответствующие четырем уровням, то в этом случае сложность

$$C = n_1 n_2 = 5 \cdot 4 = 20,$$

где n_1, n_2 - число уровней соответствующего фактора.

В общем случае

$$C = \prod_{i=1}^{i=k} n_i ,$$

где n - число факторов

Если $n_i = n$, то $C = n^k$.

Априорная информация об объекте

Под априорной понимают информацию, известную до начала исследования, которая содержится в монографиях, научных статьях, отчетах, описаниях открытий и изобретений, каталогах, справочниках и т.д.

Если об объекте известно все /априорная информация предельно высокая/, то исследования не нужны. Если информация ограниченна, то исследователь должен установить, какая новая информация нужна, и в соответствии с этим, а также в соответствии с рабочей гипотезой, составить план предстоящей работы.

Управляемость объекта

Управляемость - свойство, позволяющее изменять состояние объекта по усмотрению исследователя. Управляемые объекты характерны тем, что исследователь может изменять все входные величины. В частично управляемых можно менять только их часть. На управляемых и частично управляемых объектах можно ставить эксперимент, за неуправляемыми можно только наблюдать.

Воспроизводимость объекта

Воспроизводимость - свойство объекта переходить в одно и то же состояние, если сочетание факторов находится на одном и том же уровне. Чем выше воспроизводимость, тем проще выполнять эксперимент и тем достовернее его результаты.

Вопросы к разделу I

1. Определение объекта исследования.

2. Что понимается под представлением объекта исследования как условно изолированного целого?

3. Что понимают под средствами реализации процессов в объекте исследований?

4. В чем суть понятия модели "черный ящик"?

5. Дайте определение и раскройте суть понятия выходной величины /параметра/.

6. Перечислите основные требования, предъявляемые к выходным величинам /параметрам/. Поясните суть каждого требования.

7. Дайте определение и раскройте суть понятия входной величины /фактора/.

8. Какие факторы называются контролируемыми и управляемыми? Приведите примеры из практики.

9. В чем различие между неконтролируемыми и неуправляемыми и контролируемыми, но неуправляемыми входными величинами? Приведите примеры из практики.

10. Перечислите основные требования, предъявляемые к входным величинам /факторам/. Поясните суть каждого требования.

11. Какие требования по точности предъявляют к факторам и параметрам?

12. В чем суть предъявляемого к факторам требования однозначности? Поясните его на примере из практики.

13. Перечислите важнейшие свойства, характеризующие объект исследования.

14. Дайте определение и раскройте суть понятия "сложность объекта исследования". Как определяется сложность объекта? Приведите пример.

15. Что понимается под априорной информацией?

16. Приведите классификацию объектов исследования по полноте априорной информации.

17. Что такое управляемость объекта? Приведите классификацию объектов по управляемости.

18. Что понимают под воспроизводимостью объекта исследования? Поясните суть этого свойства объекта исследования на примере из практики.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПОДОБИЕ

В прикладных исследованиях широко применяют моделирование, под которым понимают способ познания действительности с помощью моделей. Модель - материальный или мысленный объект, отображающий основные свойства объекта-оригинала. Сознательное использование моделей позволяет исследователю с меньшими затратами получить более строгие результаты и избежать ряда погрешностей. Важнейшим требованием, предъявляемым к моделям, является их подобие объектам-оригиналам.

Два объекта подобны [3; 4], если по известным характеристикам одного простым пересчетом можно получить характеристики другого.

Различают абсолютное и практическое подобие. Первое требует тождества всех процессов в объектах, пространстве и во времени. Второе же требует подобия только тех процессов, которые наиболее существенны для данного исследования.

Теория подобия позволяет: выбрать параметры модели; пересчитать данные модельного эксперимента на натурный объект; обобщить результаты исследований, проведенных в различных режимах и условиях; распространить результаты эксперимента, проведенного в данном диапазоне измерения факторов, на более широкие интервалы их варьирования.

2.1. Классификация моделей

В специальной литературе приводится описание большого числа моделей и используются различные принципы их классификации. В данном пособии приведена классификация /рис.2.1/, предложенная В.А.Вениковым [4].

Модели бывают мысленными и материальными /рис.2.1/. Мысленные делятся на наглядные, символические и математические.

К наглядным моделям относятся мысленные представления /гипотезы/, так называемые воображаемые модели /например, модель атома/. По мысленным представлениям могут создаваться иллюстрирующие их материальные объекты в виде наглядных аналогов или макетов.

Символические /знаковые/ модели могут иметь вид условно-знаковых представлений /географические карты, записи химических реакций/; графовых представлений /"дерево графов" изображает состояние системы и пути перехода/; условно-подобных представлений /по некоторым признакам составляются условно подобные группы/.

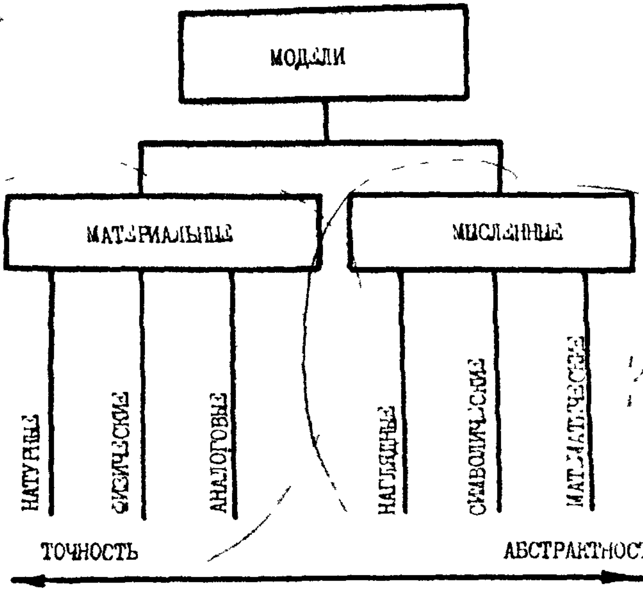


Рис.2.1. Классификация моделей

Для инженеров-механиков наиболее важной мысленной моделью является математическая. Суть ее заключается в том, что основные черты и процессы изучаемых объектов описываются математическими уравнениями и соотношениями.

Математические модели могут быть представлены алгоритмами и программами, составленными для вычислительных машин. Распространенная модель этого класса - схемы замещения, широко используемые в электротехнике.

Материальные модели делятся на натурные, физические и математические материальные. Натурная модель - сам объект, подлежащий исследованию. На натурной модели можно проводить стендовый и производственный эксперимент. Эксперимент, проводимый в производственных условиях, как правило, является обязательной частью прикладного исследования. Исследования на натурных моделях выступают в качестве критериев истинности всего исследования.

Физическая модель характерна тем, что физическая природа протекающих в ней процессов аналогична природе процессов объекта-оригинала. Если физическая модель подобна оригиналу, то поставленный на ней эксперимент через масштабные коэффициенты может быть пересчитан на натуру. Полученная при этом информация будет соответствовать результатам натурного эксперимента.

Процессы в математических материальных моделях имеют другую физическую природу по сравнению с процессами объекта-оригинала. Широко распространены прямые аналоговые модели. Например, исследование гидравлических объектов часто проводится на электрических моделях. Большое распространение получили аналогово-структурные модели, реализуемые на аналоговых машинах. В последнее время многие исследования выполняют с применением цифровых моделей. В этом случае в качестве модели выступает комплекс: алгоритм - программа - ввод - вычислительная машина - вывод. Ряд процессов удобно моделировать на гибридных моделях - аналоговых вычислительных комплексах, а также на функциональных кибернетических моделях.

В инженерных исследованиях наиболее широко распространены математические мысленные и материальные, а также натурные и физические модели.

2.2. Построение моделей

При построении математических мысленных или материальных моделей руководствуются следующими соображениями.

Первоначально из общего комплекса процессов, характеризующих объект, выделяют те, которые важны в данном исследовании и отражают основные свойства оригинала. Затем создают общую описательную модель выделенных процессов. Выполняют словесное описание, проводят классификацию и систематизацию, производят, если позволяет исходный материал и статистические оценки.

На третьем этапе определяют параметры и устанавливают значимые факторы. С этой целью сложный объект разбивают на элементарные звенья. Для каждого звена определяют входные и выходные величины. Оценивают весомость влияния каждого фактора, выделяют значимые и отбрасывают второстепенные.

На четвертом этапе создают математическую модель объекта, для чего составляют уравнения, описывающие процессы в звеньях, устанавливают и записывают уравнения связей и соотношений, выбирают метод решения, который оказывает определяющее влияние на форму записей.

На заключительном этапе решают уравнения /непосредственно, численными методами на ЦВМ или на аналоговых моделях/.

Натурные и физические модели можно создавать на основании математических. При отсутствии последних поступают следующим образом.

Выделяют процессы, отображающие основные свойства оригинала. Дают общее словесное описание модели и устанавливают параметры и факторы. При этом может оказаться полезным мысленное расчленение объекта на звенья в соответствии с третьим пунктом методики построения математических моделей и проведение анализа. Затем с использованием теории размерностей определяют критерии подобия, по значениям которых рассчитывают значения физических параметров модели.

Рассмотрим пример построения математической модели.

Пример. Предположим, что необходимо установить, как изменяется во времени давление в шахтной пневматической установке при изменении числа одновременно работающих потребителей сжатого воздуха.

Шахтная пневматическая установка предназначена для производства сжатого воздуха, транспортирования его к потребителю и преобразования пневматической энергии в механическую. Как объект исследования ее можно рассматривать с ряда позиций: процессы преобразования и рассеяния энергии; вопросы безопасной эксплуатации; экономические аспекты и т.д. При построении математической модели в данном случае выделим только то, что связано с изменением давления при изменении числа потребителей в работе. Шахтная пневматическая сеть имеет определенную емкость. Компрессор подает в сеть в единицу времени конкретную массу воздуха; потребители забирают сжатый воздух из сети. Если воздух отбирается меньше, чем подается, то масса его в сети увеличивается и давление в ней нарастает. При потреблении воздуха больше чем подача - давление снижается.

В шахтной пневматической установке можно выделить три звена: компрессорная станция, пневматическая сеть и потребители пневматической энергии.

Компрессорная станция /в простейшем случае может работать один компрессор/ предназначена для производства сжатого воздуха. В рассматриваемом случае важнейшей ее характеристикой будет зависимость подачи компрессоров /компрессора/ от определяющих факторов. В общем случае подача зависит от давления в нагнетательном патрубке, температуры, давления и влажности атмосферного воздуха, сопротивления фильтра, состояния системы охлаждения и ряда других факторов. Параметром компрессорной станции является подача по стандартному воздуху $Q_к$. Оценив влияние всех факторов на подачу, приходим к выводу, что в расоматриваемом исследовании следует оставить только один фактор - давление p в нагнетательном патрубке.

Таким образом, получим зависимость

$$Q_к = f(p). \qquad /2.1/$$

График зависимости /2.1/ для поршневых и винтовых компрессоров имеет вид кривой 1 /рис.2.2/.

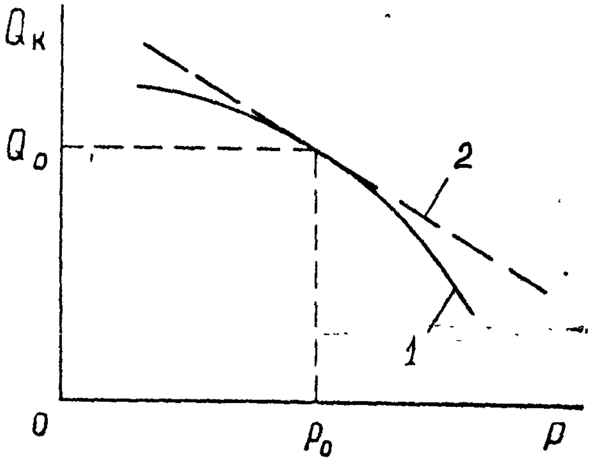


Рис.2.2. Зависимость подачи компрессора от давления

В переходном режиме изменение значения давления относительно давления в установившемся режиме оказывается незначительным. Поэтому с достаточной для практики точностью интересующий криволинейный участок характеристики можно заменить прямолинейным. Проведем линеаризацию выражения /2.1/ путем разложения в ряд Тейлора и отбрасывания членов ряда высших степеней. Получим

$$Q_к = Q_0 + \left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0 (p - p_0), \qquad /2.2/$$

где Q_0 - подача компрессорной станции /компрессора/ в установившемся режиме до возмущения, м^3/мин; $\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0$ - частная производная от подачи компрессора по давлению в точке установившегося режима работы, м^3/мин·Па; p_0 - давление в нагнетательном патрубке до возмущения, Па.

График зависимости /2.2/ показан штриховой линией 2 /на рис.2.2/.

Шахтная пневматическая сеть предназначена для транспортирования сжатого воздуха. На современных крупных шахтах расстояние от компрессорной станции до наиболее удаленного потребителя составляет 2 км и более. Шахтная сеть имеет значительную разветвленность. Общая протяженность трубопроводов составляет около 50 км. Средневзвешенный внутренний диаметр трубопровода обычно составляет 150 мм. Сеть характеризуется распределенными емкостью и гидравлическим сопротивлением. Общая емкость сети с указанными параметрами близка к 1000 м^3. Время переходных процессов в сети с такой емкостью на несколько порядков меньше времени пробега упругих волн давления. Поэтому шахтную пневматическую сеть можно представить не распределенной, а сконцентрированной в одном месте емкостью. Распределенное гидравлическое сопротивление сети также можно сконцентрировать в одном месте – у потребителей пневматической энергии.

Известно, что для сосредоточенной емкости уравнение состояния воздуха имеет вид

$$pW = MR\theta, \qquad /2.3/$$

где W – объем сети, м^3; M – масса воздуха в сети, кг; R – газовая постоянная, Дж/кг·К; θ – абсолютная температура воздуха, К.

В данном примере рассматривают изменение давления во времени.

Предположим, что переходный процесс протекает при постоянной температуре $\theta = \theta_{ст}$. Из выражения /2.3/ с учетом того, что $Q = const$, получим

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R\theta_{ст}}{W} \frac{dM}{dt}, \qquad /2.4/$$

где t – время, с.

Масса воздуха, поданного в сеть компрессорами за время dt, составит

$$dM_к = \rho_{ст} \frac{Q_к}{60} dt,$$

где $\rho_{ст}$ – плотность "стандартного" воздуха, кг/м^3.

Масса воздуха, отбираемого из сети потребителями за то же время dt, равна

$$dM_п = \rho_{ст} \frac{Q_п}{60} dt,$$

где $Q_п$ – расход "стандартного" воздуха потребителями, м^3/мин.

Таким образом, за время dt изменение массы воздуха в сети составит

$$dM = dM_к - dM_п$$

или

$$dM = \frac{\rho_{ст}}{60}\left(Q_к - Q_п\right)dt.$$

Подставив значение dM в выражение /2.4/, с учетом того, что $\rho_{ст} = \frac{P_{ст}}{R\theta_{ст}}$, получим

$$\frac{dp}{dt} = \frac{P_{ст}}{60W}\left(Q_к - Q_п\right). \qquad /2.5/$$

Все многообразие потребителей пневматической энергии сведем к условным однотипным, работающим при одинаковой /усредненной/ мощности на валу.

Тогда

$$Q_п = f(p, n), \qquad /2.6/$$

где n - число одновременно работающих потребителей.

Переходный процесс в шахтной пневматической установке вызывается изменением числа потребителей в работе. Графики зависимости расхода $Q_п$ от давления p при разных числах n потребителей в работе /кривые 1 и 3/ показаны на рис.2.3.

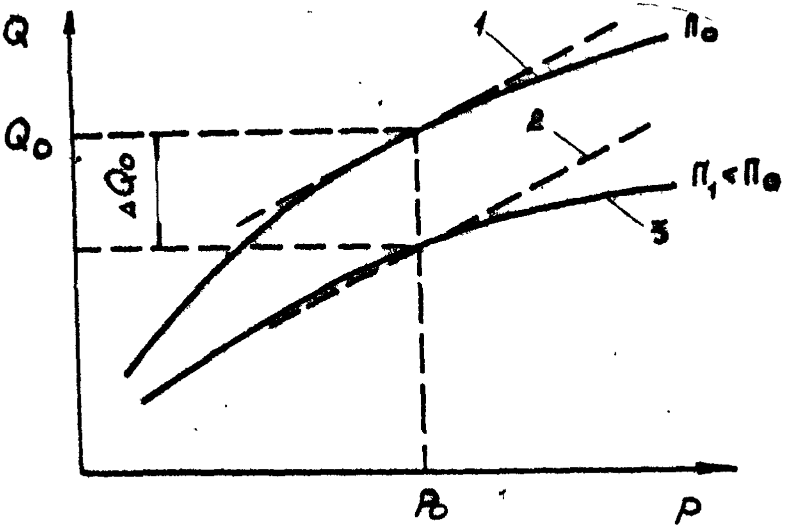


Рис.2.3. Зависимость расхода воздуха от давления и числа потребителей

После линеаризации выражения /2.6/ получим

$$Q_n = Q_0 + \left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 (p - p_0) + \left(\frac{\partial Q_n}{\partial n}\right)_0 (n - n_0),$$

или

$$Q_n = Q_0 + \left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 (p - p_0) + \Delta Q_0, \qquad /2.7/$$

где $\left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0$ – частная производная от расхода Q_n по давлению p в точке установившегося режима работы до возмущения, м^3/мин·Па; $\left(\frac{\partial Q_n}{\partial n}\right)_0$ – частная производная от расхода Q_n по числу потребителей n в режиме до возмущения, м^3/мин; n_0 – число условных потребителей до возмущения;

$$\Delta Q_0 = \left(\frac{\partial Q_n}{\partial n}\right)_0 (n - n_0).$$

На рис.2.3 зависимость /2.7/ изображена штриховой линией 2.

Подставив в выражение /2.5/ значение подачи $Q_к$ из выражения /2.2/ и расхода Q_n из выражения /2.7/ и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$\frac{dp}{dt} = \frac{P_{ст}}{60W}\left(\left(\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0\right)(p - p_0) - \Delta Q_0\right). \qquad /2.8/$$

Приведем выражение /2.8/ к виду

$$\frac{d(p - p_0)}{(p - p_0) - \Delta Q_0 \Big/ \left(\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0\right)} = \frac{P_{ст}}{60W}\left(\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0\right)dt.$$

После интегрирования последнего выражения получим

$$p - p_0 = -\frac{\Delta Q_0}{\left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0}\left(1 - exp\left(-\frac{P_{ст}}{60W}\left(\left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0\right)t\right)\right). \qquad /2.9/$$

Таким образом, давление в пневматической установке после изменения числа одновременно работающих потребителей изменяется по экспоненциальному закону.

Величина

$$\frac{1}{\frac{P_{ст}}{60W}\left(\left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0\right)} = T$$

имеет размерность времени и является постоянной времени апериодического процесса. Так как $\left(\frac{\partial Q_n}{\partial p}\right)_0 > 0$, а $\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0 < 0$, то при уменьшении числа потребителей $(\Delta Q_0 < 0)$ с течением времени $(t \to \infty)$ изменение давления $(p - p_0)$ будет стремиться к величине

$$\Delta p_0 = -\Delta Q_0 / \left(\left(\partial Q_n / \partial p\right)_0 - \left(\partial Q_к / \partial p\right)_0\right).$$

Подставив в выражение /2.9/ величины T и Δp_0, получим относительно простую математическую зависимость изменения давления в шахтной пневматической установке при изменении числа одновременно работающих потребителей:

$$p - p_0 = \Delta p_0 \left(1 - exp\left(-t/T\right)\right).$$

График изменения давления во времени показан на рис.2.4.

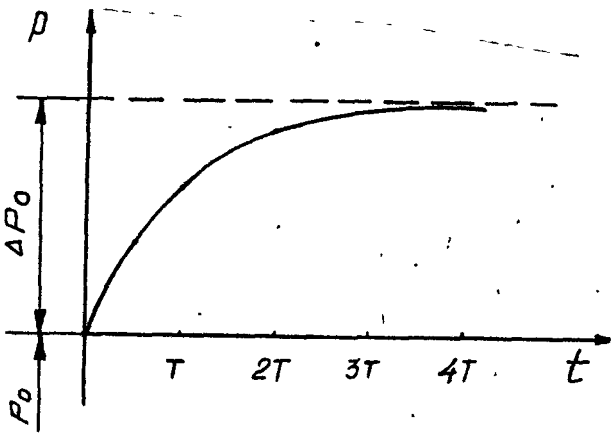


Рис.2.4. График изменения давления в шахтной пневматической сети

Из рис.2.4 следует, что давление практически достигает нового установившегося значения $p_0 + \Delta p_0$ через время $3T$ после возмущения.

2.3. Сущность подобия. Теоремы подобия

Процессы в объекте исследования описываются в общем случае известной или неизвестной системой дифференциальных уравнений связи между параметрами и факторами. Необходимым условием подобия двух объектов является буквенно одинаковый вид системы уравнений. Только в этом случае характер процессов в объектах может быть одинаковым и сами объекты можно будет отнести к общему классу.

Если в одном объекте связь между параметром и фактором является линейной, а во втором подчиняется, например, синусоидальному закону, то по характеристикам первого нельзя получить характеристики второго объекта простым пересчетом. Рассматриваемые объекты не могут быть подобными.

Однако одинаковый вид уравнений, описывающих процессы в объектах, является только необходимым, но не достаточным условием подобия. В подтверждение сказанного рассмотрим простейший случай. Параметр объекта исследования является функцией двух факторов x и t. Процесс в объекте описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x, \qquad /2.10/$$

где a_2, a_1, a_0, b_0 - постоянные положительные величины, определяемые особенностями объекта.

Начальные /при t = 0/ условия характеризуются значениями y_0 = 0 и $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ = 0. Фактор x в момент t = 0 скачком изменяется от нуля до $x_к$.

В рассматриваемом случае комплекс $\eta = \frac{a_1}{2a_0} \left| \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \right|$ называется коэффициентом демпфирования. При $\eta > 1$ процесс изменения во времени параметра y - сходящийся апериодический /рис.2.5,а/, а при $\eta < 1$ - сходящийся колебательный /рис.2.5,б/.

Рассмотренные процессы принципиально отличаются друг от друга, хотя и описываются уравнениями одинакового вида. Различными окажутся также процессы, описываемые двумя уравнениями одинакового вида, с численно одинаковыми коэффициентами, при одинаковых начальных условиях, если знаки коэффициентов будут различными. При $a_1 < 0$ и $|\eta| < 1$ процесс, описываемый уравнением /2.10/, будет колебательным, но не сходящимся, а расходящимся. Для выделения из множества процессов, описываемых данным видом уравнений, конкретного процесса необходимо располагать значениями коэффициентов при переменных и их производных, а также начальными условиями. Для уравнений в частных производных, кроме того, должны быть известны граничные зависимости. Коэффициенты, начальные условия и граничные зависимости в совокупности являются условиями однозначности процессов.

Подобие кроме одинаковости систем уравнений предъявляет к объектам определенные требования и к условиям однозначности.

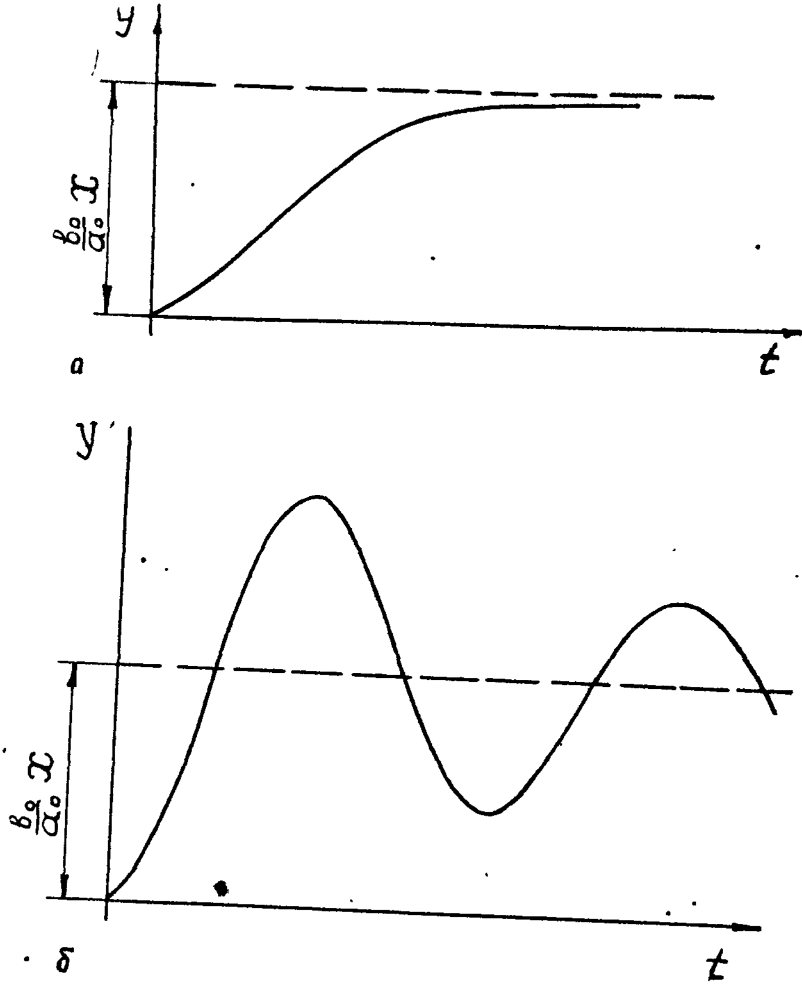


Рис.2.5. Процессы изменения параметра y во времени при различных значениях γ

Поясним суть этих требований следующим примером. Предположим, что имеется два объекта. В первом процесс описывается функцией

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где y – параметр; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – факторы.

Для второго объекта уравнение процесса имеет вид

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

где Y – параметр; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – факторы.

В условия однозначности входят все факторы. Пропорциональность означает

$$x_1/X_1 = m_1, \quad x_2/X_2 = m_2, \ldots, \quad x_n/X_n = m_n.$$

Если среди факторов для первого объекта имеются две массы, то соответственно две массы можно выделить и для второго объекта. Отношение соответствующих масс $x_{M_1}/X_{M_1} = m_{M_1}$ и $x_{M_2}/X_{M_2} = m_{M_2}$. Для подобных объектов $m_{M_1} = m_{M_2}$.

Аналогичные соображения можно высказать для соответствующих длин, ускорений и т.д.

Между конкретными величинами /например, массами, ускорениями и силами/ в объектах существует определенная функциональная связь, которая предопределяет возможность получения обобщенных характеристик – критериев подобия.

Теория подобия базируется на трех теоремах. В специальной литературе [3; 4] приводятся различные их формулировки при близком содержании.

Первая теорема. Необходимым условием подобия двух объектов является равенство соответствующих критериев подобия.

Вторая теорема. Уравнения, описывающие процесс в объекте, могут быть представлены зависимостями между критериями подобия.

Третья теорема. Необходимыми и достаточными условиями подобия объектов являются равенство критериев подобия и пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности.

2.4. Критерии подобия. Перерасчет результатов модельных испытаний на натуру

Критерии подобия – безразмерные комбинации, которые составлены из физических величин, описывающих процессы в исследуемых объектах.

Обозначаются критерии буквой π. В соответствии с теорией подобия при экспериментах необходимо измерять все величины, входящие в состав критериев. Обрабатывать результаты следует в виде зависимостей между критериями подобия. Полученные таким образом зависимости будут справедливы не только для данного эксперимента, но и для всех подобных объектов.

Например, критериями практического подобия двух однотипных лопастных машин /радиальных или осевых/, работающих в установившихся режимах, являются безразмерный напор π_1 и безразмерная подача π_2. Пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, для лопастных машин, работающих в установившихся режимах, выполняется при их геометрическом подобии. Последнее требует одинаковости форм и одинакового отношения сходственных размеров. Так как геометрическое подобие является обязательным условием практического подобия большинства объектов, то остановимся на этом понятии несколько подробнее.

Известно, что лопастная машина состоит из подвода, рабочего колеса и отвода. Два рабочих колеса, например радиальной машины, будут геометрически подобными, если число и форма лопаток у них будут одинаковыми, а сходственные размеры /рис.2.6/ $D_{2н}$ и $D_{2м}$, $b_{2н}$ и $b_{2м}$, $D_{0н}$ и $D_{0м}$ и т.д. будут находиться в соотношении $D_{2н}/D_{2м} = b_{2н}/b_{2м} = D_{0н}/D_{0м}$, где $D_{2н}$, $b_{2н}$, $D_{0н}$, $D_{2м}$, $b_{2м}$, $D_{0м}$ - диаметр, ширина колеса и диаметр входа соответственно натурной и модельной машин.

Для геометрического подобия лопастных машин, кроме рабочих колес, должно быть соблюдено подобие их подводов и отводов.

Безразмерный напор

$$\pi_1 = gH/n^2 D_2^2,$$

где g - ускорение свободного падения, м/с^2; H - напор, м; n - частота вращения ротора, $1/с$; D_2 - диаметр рабочего колеса, м, а безразмерная подача

$$\pi_2 = Q/n D_2^3.$$

Здесь Q - подача, м^3/с.

Зависимость безразмерного напора от безразмерной подачи представляет собой безразмерную /типовую/ напорную характеристику лопастной машины. Она не связана с размерами, частотой вращения ротора и плотностью жидкости, а характеризует только особенности гидродинамической схемы и является одинаковой для всего семейства лопастных машин.

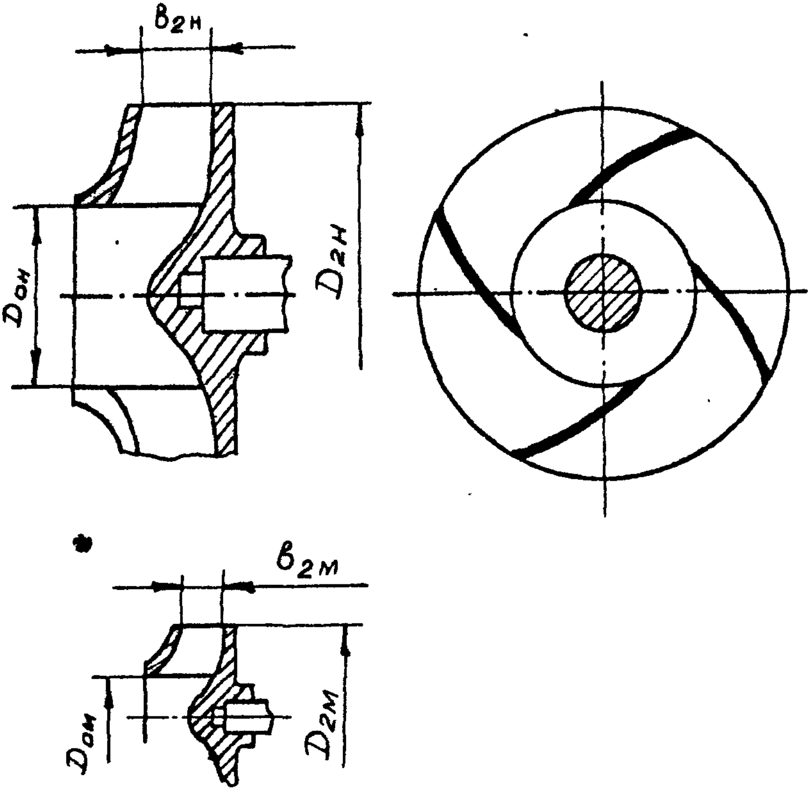


Рис.2.6. Схемы рабочих колес геометрически подобных радиальных лопастных машин

При создании крупных машин первоначально изготовляют несколько небольших моделей различных гидродинамических схем и проводят их испытания.

Определяют критерии π_1 и π_2 для различных режимов. Строят график зависимости π_1 от π_2 - безразмерную характеристику, а затем по законам подобия определяют размеры, частоту вращения и строят зависимость напора от подачи для натурной машины.

Если две подобные машины работают в сходных режимах, то для них критерии π_1 и π_2 соответственно составляют

$$\pi_{1м} = \pi_{1н}; \qquad \pi_{2м} = \pi_{2н},$$

где индекс "$м$" обозначает "модель"; индекс "$н$" - "натура".

Обозначим параметры модельной машины $H_м$, $Q_м$, $n_м$, $D_{2м}$, а натурной $H_н$, $Q_н$, $n_н$, $D_{2н}$.

Безразмерный напор модели

$$\pi_{1м} = g H_м / n_м^2 D_{2м}^2,$$

а натуры

$$\pi_{1н} = g H_н / n_н^2 D_{2н}^2.$$

Так как $\pi_{1м} = \pi_{1н}$, то

$$H_м / n_м^2 D_{2м}^2 = H_н / n_н^2 D_{2н}^2. \qquad /2.11/$$

Безразмерные подачи модели и натуры

$$\pi_{2м} = Q_м / n_м D_{2м}^3; \qquad \pi_{2н} = Q_н / n_н D_{2н}^3.$$

Учитывая, что $\pi_{2м} = \pi_{2н}$, получаем

$$Q_м / n_м D_{2м}^3 = Q_н / n_н D_{2н}^3. \qquad /2.12/$$

Выражения /2.11/ и /2.12/ используют для определения размеров $D_{2н}$ и частоты вращения $n_н$ при заданных напоре $H_н$ и подаче $Q_н$.

Известны два способа определения критериев подобия: с помощью анализа размерностей и по уравнениям процесса.

2.5. Определение критериев подобия с использованием теории размерностей

2.5.1. π - теорема и ее следствия

Вторую теорему подобия часто называют π-теоремой. Однако π-теорема несет больше информации, чем вторая теорема.

В соответствии с π-теоремой, если процесс в объекте характеризуется m фундаментальными физическими величинами, для выражения размерностей которых используется k основных единиц, то его /процесс/ можно описать $m-k$ безразмерными комбинациями, составленными из этих величин.

Из теоремы следует два важных практических вывода.

Первый. Уравнения, описывающие физические процессы, могут быть выражены уравнениями связи между безразмерными комбинациями - критериями подобия. Последние уравнения будут справедливы для всех подобных объектов.

Второй. Число независимых критериев равно $m-k$. Оно меньше числа размерных физических переменных на число основных единиц. Речь, таким образом, идет об уменьшении числа переменных, которыми описывают процесс. Это в свою очередь ведет к уменьшению объема экспериментальных исследований и делает результаты более наглядными.

Предположим, что процессы в объекте описываются $m = 5$ фундаментальными физическими величинами. Одна из них выходная - параметр и четыре входных - факторы. Решено экспериментальным путем установить связь между выходной и входными величинами, не прибегая к безразмерным комбинациям. Предположим также, что при постановке опытов каждый фактор будет фиксироваться на пяти уровнях. В этих условиях для перебора всех возможных сочетаний необходимое число опытов, равное сложности объекта, составит $C = 5^4 = 625$. Посмотрим, что даст переход к безразмерным комбинациям. Предположим, что число основных единиц $k = 3$ /это очень часто встречающийся случай/. В условиях рассматриваемого примера в соответствии с π-теоремой после перехода к критериям подобия число безразмерных переменных составит $m-k = 5 - 3 = 2$. Одна из них - безразмерный параметр, вторая - обобщенный безразмерный фактор. Для получения данных, одинаково достоверных с данными экспериментов без использования критериев подобия, в последнем случае достаточно будет поставить не 625, а всего 5 опытов. При переходе к безразмерным комбинациям упрощается графическое представление информации. Зависимость безразмерного параметра от обобщенного безразмерного фактора будет представлена на графике одной линией.

Если факторы в опытах фиксируются на пяти уровнях, то на одном рисунке можно представить информацию 25 опытов. Следовательно, в рассматриваемом случае данные 625 опытов будут графически представлены на 25 рисунках. Анализ такой графической информации весьма затруднен.

2.5.2. Методика определения критериев подобия

Решение этой задачи состоит из трех этапов.

На первом выбираются фундаментальные переменные. При этом руководствуются соображениями, изложенными в первом разделе. Обычно при выборе параметра /выходной переменной/ осложнений не бывает. Как правило, заранее известно, что необходимо определить. Входной фундаментальной переменной /фактором/, как отмечалось ранее, является любая величина, влияющая на выходную, и способная изменяться независимо от других. Для правильного выбора фундаментальных переменных необходимо глубокое проникновение в суть исследуемого объекта. Часто это требует не только изучения априорной информации, но и постановки предварительных экспериментов. Если после выбора фундаментальных переменных система безразмерных комбинаций не получается, то необходимо возвратиться к анализу объекта исследования.

На втором этапе выбирается система основных единиц для выражения размерностей фундаментальных переменных. В качестве основных рекомендуется принимать основные единицы СИ: метр - единица длины ℓ, размерность L; килограмм - единица массы m, размерность M; секунда - единица времени t, размерность T; ампер - единица силы электрического тока i, размерность I; кельвин - единица термодинамической температуры θ, размерность K; моль - единица количества вещества n, размерность N; кандела - единица силы света j, размерность J.

Используя размерности основных единиц, можно составить формулы размерностей всех фундаментальных переменных. Например, известно, что сила определяется зависимостью $\mathcal{F} = ma$.

Формула размерности силы определяется как произведение формул размерности массы и ускорения

$$[\mathcal{F}] = [m][a] = [M][LT^{-2}] = [MLT^{-2}].$$

Записав формулы размерностей всех фундаментальных переменных, описывающих процессы в объекте, устанавливают, какие размерности основных единиц в них входят. Эти единицы и будут составлять систему основных единиц в условиях конкретной задачи.

На третьем, заключительном этапе определяются критерии подобия с использованием теории размерностей.

2.5.3. Определение критериев подобия процесса силового взаимодействия шара с обтекающим потоком жидкости

Схема стенда для определения силы, с которой поток действует на шар, показана на рис.2.7. Шар помещен в трубопровод настолько большого внутреннего диаметра, что стеснением им потока можно пренебречь. Гибкой нитью шар связан через блок с пружинным динамометром. Усилие $\mathcal{F}$ зависит от свойств шара и потока. Если шероховатостью шара можно пренебречь /шар выполнен гладким/, то его свойства определяются одной переменной - диаметром d. Свойства потока оцениваются средней скоростью V, плотностью ρ и вязкостью μ жидкости. Таким образом, в рассматриваемом случае фундаментальных переменных пять: параметр $\mathcal{F}$ и факторы d, V, ρ, μ.

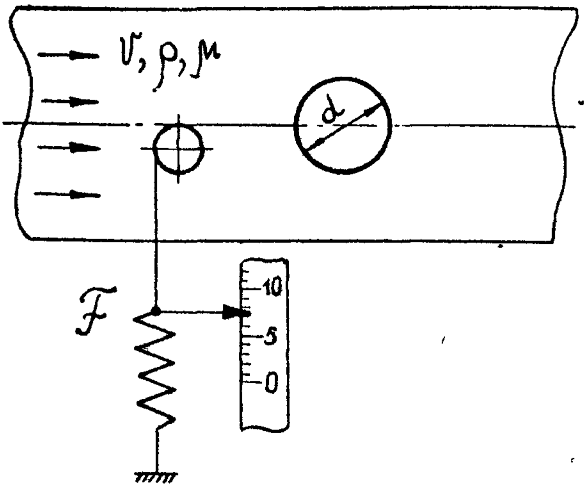


Рис.2.7. Схема стенда определения силы воздействия потока на шар

Для выбора основных единиц запишем формулы размерностей фундаментальных переменных. Наименования фундаментальных переменных, их обозначения и размерности приведены в табл.2.I.

Таблица 2.1

Фундаментальные переменные	Обозначение	Размерность
Сила	$\mathcal{F}$	MLT^{-2}
Скорость жидкости	v	LT^{-1}
Плотность жидкости	ρ	ML^{-3}
Вязкость динамическая	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Диаметр шара	d	L

Из этой таблицы следует, что размерности всех фундаментальных переменных можно выразить тремя основными единицами – M, L и T. Так как число m фундаментальных переменных пять, а число k основных единиц три, то независимых критериев будет $m - k = 5-3 = 2$. Критерий – безразмерная комбинация – в общем случае может быть представлен произведением фундаментальных переменных в определенных степенях. В рассматриваемом случае критерий

$$\pi = \mathcal{F}^{x} d^{y} v^{z} \rho^{u} \mu^{r},$$

где x, y, z, u, r – показатели степеней. Показатели могут быть целыми, дробными, положительными и отрицательными числами. Они могут принимать и нулевое значение. В последнем случае критерий не будет зависеть от соответствующей фундаментальной переменной.

Будем искать произведение критериев π_1 и π_2 в виде

$$\pi_1 \pi_2 = \mathcal{F}^{a} d^{b} v^{c} \rho^{e} \mu^{f}, \qquad /2.13/$$

где a, b, c, e, f – неизвестные показатели степеней.

Если зависимость /2.13/ справедлива относительно переменных, то она будет справедлива и относительно размерностей. Подставим в /2.13/ вместо переменных их размерности. При этом будем учитывать, что поскольку критерии безразмерны, то левая часть уравнения представлена произведением размерностей в нулевых степенях:

$$M^{0} L^{0} T^{0} = (MLT^{-2})^{a} L^{b} (LT^{-1})^{c} (ML^{-3})^{e} (ML^{-1}T^{-1})^{f}.$$

Чтобы последнее выражение было справедливым, должны выполняться условия:

для M

$$0 = a + e + f; \qquad /2.14/$$

для T

$$0 = -2a - c - f; \qquad /2.15/$$

для L

$$0 = a + b + c - 3e - f. \qquad /2.16/$$

В трех уравнениях пять переменных. Решив совместно уравнения /2.14/ - /2.16/, можно исключить три переменные. От того, какие переменные исключаются, зависит вид критериев. Все критерии будут формально верными. Однако одни из них имеют ясный физический смысл, а другие - нет. Поэтому решение задачи по установлению вида критериев иногда приходится повторять при различных комбинациях исключаемых переменных. Выразим переменные b, c и e через a и f.

Из выражений /2.14/ и /2.15/ получим

$$e = -a - f; \qquad /2.17/$$

$$c = -2a - f. \qquad /2.18/$$

После подстановки в зависимость /2.16/ значения степени e из /2.17/ и степени c из /2.18/ имеем

$$b = -2a - f. \qquad /2.19/$$

Подставим в выражение /2.13/ показатели степеней e, c и b:

$$\pi_1 \pi_2 = F^a d^{-2a-f} v^{-2a-f} \rho^{-a-f} \mu^f.$$

Объединим члены последнего уравнения, имеющие одинаковые показатели степеней:

$$\pi_1 \pi_2 = \left(\frac{F}{d^2 v^2 \rho}\right)^a \left(\frac{\mu}{\rho v d}\right)^f.$$

Из последнего выражения следует, что в качестве критериев подобия могут быть приняты комплексы $\dfrac{F}{d^2 \cdot v^2 \rho}$ и $\dfrac{\mu}{\rho \cdot v d}$.

Первый является безразмерным усилием. Усилие, действующее со стороны потока на шар, делится на $d^2 v^2 \rho$. Здесь d^2 - площадь квадрата, сторона которого равна диаметру шара; ρv^2 - удвоенное скоростное давление. Так как кинематический коэффициент вязкости жидкости $\nu = \mu/\rho$, а $vd/\nu = Re$, то критерий $\mu/\rho v d = 1/Re$. По теории подобия произведение, частное нескольких критериев или возведение их в произвольную степень дают новый критерий. Таких критериев можно получить бесчисленное множество. Однако независимых среди них будет только $m-k$ критериев.

При установлении зависимости силы от определяющих факторов без перехода к безразмерным комбинациям необходимо фиксировать диаметр, скорость, плотность и вязкость на определенном числе уровней, например на пяти. Для плотности и вязкости независимость изменения при этом практически реализовать нельзя. После перехода к безразмерным комбинациям при постановке эксперимента необходимо изменять только одну из входных величин. Проще всего изменению поддается скорость. Установив пять уровней скорости, получим пять соответствующих уровней числа Рейнольдса. Примерный график зависимости критерия $\mathcal{F}/\rho d^2 v^2$ от числа Re показан на рис.2.8. Диаметр шара, вязкость и плотность будут оставаться неизменными в течение всего исследования.

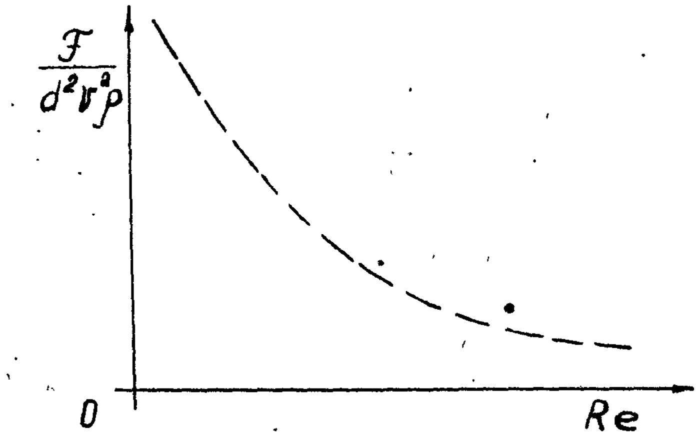


Рис.2.8. График зависимости $\mathcal{F}/d^2 v^2 \rho = f(Re)$

2.6. Определение критериев подобия из уравнений процесса

Для решения поставленной задачи необходимо уравнения, которыми описываются процессы в исследуемом объекте, привести к безразмерному виду. Эта операция может выполняться несколькими способами. Один из наиболее рациональных – способ, основанный на введении безразмерных переменных. Если при этом переменные будут иметь одинаковый порядок /например, порядок единицы/, то коэффициенты при них в безразмерных уравнениях позволят одновременно оценить весомость влияния соответствующих факторов.

Критериями подобия будут все безразмерные переменные и коэффициенты при них в критериальных уравнениях.

Покажем сущность метода на примере установления критериев, описывающих процесс изменения во времени давления в шахтной пневматической установке при изменении числа одновременно работающих потребителей. Из изложенного в подразд.2.2 следует, что интересующий нас переходный процесс описывается системой уравнений /2.2/, /2.5/ и /2.7/. Введем следующие безразмерные переменные:

$$q = \frac{P - P_0}{P_0}; \quad V_\kappa = \frac{Q_\kappa}{Q_0}; \quad V_n = \frac{Q_n}{Q_0} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{Q_0}{60W} t.$$

Смысл трех первых переменных понятен. Все они имеют порядок единицы. Величина $60W/Q_0$ равна времени, в течение которого емкость объемом W заполняется воздухом при расходе Q_0.

Таким образом, безразмерное время τ определяется в долях единицы $60W/Q_0$.

Переход к безразмерной форме уравнения /2.2/ выполняется делением всех его членов на расход Q_0, а также умножением и делением второго слагаемого правой части на давление P_0:

$$\frac{Q_\kappa}{Q_0} = \frac{Q_0}{Q_0} + \frac{P_0}{Q_0}\left(\frac{\partial Q_\kappa}{\partial P}\right)_0 \frac{P - P_0}{P_0}.$$

Подставив в последнее выражение безразмерные переменные, получим

$$V_\kappa = 1 + \frac{P_0}{Q_0}\left(\frac{\partial Q_\kappa}{\partial P}\right)_0 q. \qquad /2.20/$$

Разделим правую и левую части уравнения /2.5/ на P_0 и Q_0. Разделим также знаменатели правой и левой частей на $60W$:

$$d(p - P_0)/P_0 \Big/ d\frac{tQ_0}{60W} = \frac{P_{ст}}{P_0\ 60W/60W}\left(\frac{Q_к}{Q_0} - \frac{Q_п}{Q_0}\right).$$

Выполнив несложные преобразования, получим

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{P_{ст}}{P_0}\left(V_к - V_п\right). \qquad /2.21/$$

И наконец, для уравнения /2.7/

$$\frac{Q_п}{Q_0} = \frac{Q_0}{Q_0} + \frac{P_0}{Q_0}\left(\frac{\partial Q_п}{\partial p}\right)_0 \frac{P - P_0}{P_0} + \frac{\Delta Q_0}{Q_0}.$$

После подстановки безразмерных переменных получим

$$V_п = 1 + \frac{P_0}{Q_0}\left(\frac{\partial Q_п}{\partial p}\right)_0 q + \frac{\Delta Q_0}{Q_0}. \qquad /2.22/$$

Если нас интересует изменение параметра q от времени τ, то из уравнений /2.20/ - /2.22/ можно исключить $V_п$ и $V_к$.

Тогда

$$\frac{dq}{d\tau} - \frac{P_{ст}}{P_0}\left(\frac{P_0}{Q_0}\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0 - \frac{P_0}{Q_0}\left(\frac{\partial Q_п}{\partial p}\right)_0\right)q + \frac{\Delta Q_0}{Q_0} = 0,$$

откуда следует, что при нулевых начальных условиях / $q = 0$ при $\tau = 0$/ процесс будет определяться следующими критериями подобия:

$$q = \frac{P - P_0}{P_0}; \quad \tau = \frac{Q_0}{60\,W}t; \quad \frac{P_{ст}}{P_0};$$

$$\frac{P_0}{Q_0}\left(\frac{\partial Q_к}{\partial p}\right)_0; \quad \frac{P_0}{Q_0}\left(\frac{\partial Q_п}{\partial p}\right)_0 \quad и \quad \Delta Q_0/Q_0.$$

Выясним, используя π-теорему, найдены ли все независимые безразмерные комбинации.

Анализ уравнения /2.2/ свидетельствует, что в число фундаментальных переменных, описывающих процесс в рассматриваемом объекте, должны быть включены Q_0; P_0; p или $(p-P_0)$; $(\partial Q/\partial P)_0$.
Из уравнения /2.5/ дополнительно в качестве фундаментальных переменных необходимо ввести время t, давление $P_{ст}$ и емкость сети W.
И наконец, из уравнения /2.7/ дополнительно следует ввести факторы $(\partial Q_п/\partial p)_0$ и ΔQ_0.

Таким образом, общее число фундаментальных переменных, описывающих исследуемый объект, $m = 9$. Их формулы размерностей имеют вид:

$$[Q_0] = L^3 T^{-1}; \quad [P] = ML^{-1}T^{-2};$$

$$[(P - P_0)] = ML^{-1}T^{-2}; \quad [(\partial Q_\kappa/\partial p)_0] = M^{-1}L^4 T;$$

$$[t] = T; \quad [P_{ст}] = ML^{-1}T^{-2}; \quad [W] = L^3;$$

$$[(\partial Q_n/\partial p)_0] = M^{-1}L^4 T, \quad [\Delta Q_0] = L^3 T^{-1}.$$

Из этих формул следует, что размерности всех переменных могут быть выражены тремя основными единицами M, L, T. Следовательно, число независимых критериев в соответствии с π-теоремой $m - k = 9 - 3 = 6$. Оно соответствует числу критериев, полученных из уравнений процесса.

Вопросы к разделу 2

1. Что понимают под моделированием?
2. Дайте определение понятия "модель".
3. Что дает исследователю использование моделей?
4. Назовите важнейшее требование, предъявляемое к моделям.
5. Какие объекты называются подобными?
6. Цели применения теории подобия на практике.

Вопросы к подразд.2.1

1. В чем состоит различие абсолютного и практического подобия?
2. Чем отличаются мысленные модели от материальных?
3. Приведите классификацию мысленных моделей, раскройте их суть.
4. В чем заключается различие между символическими и математическими моделями?
5. Приведите классификацию материальных моделей, раскройте их суть.
6. В чем суть физического моделирования? Его роль в изучении объекта-оригинала.
7. В чем суть аналогового моделирования? Его роль в изучении объекта-оригинала.
8. В чем различие между натурной и физической моделью?

Вопросы к подразд.2.2

1. Назовите основные этапы построения математических мысленных или материальных моделей.

2. Какие из процессов, характеризующих объект, выделяют первоначально при построении его математической модели?

3. Раскройте суть процесса определения параметров и значимых факторов объекта исследования.

4. Как создаются натурные и физические модели при отсутствии математической модели объекта-оригинала?

5. Охарактеризуйте основные элементы шахтной пневматической установки. Запишите уравнения, описывающие процессы в них.

Вопросы к подразд.2.3

1. Назовите необходимое условие подобия двух объектов.

2. Приведите пример, подтверждающий, что одинаковый вид уравнений, описывающих процессы в объектах, является только необходимым, но не достаточным условием подобия.

3. Назовите необходимые и достаточные условия подобия двух объектов.

4. Что понимают под условиями однозначности процессов? Какое требование предъявляют к условиям однозначности процессов в подобных объектах?

5. Сформулируйте первую теорему подобия, отметьте положительные моменты применения ее на практике.

6. Сформулируйте вторую теорему подобия, отметьте положительные моменты применения ее на практике.

7. Сформулируйте третью теорему подобия, отметьте положительные моменты ее применения на практике.

Вопросы к подразд.2.4

1. Дайте определение понятия "критерий подобия". Какова цель использования критериев подобия?

2. Какие величины в соответствии с теорией подобия необходимо измерять при экспериментах?

3. В чем суть геометрического подобия двух объектов? Приведите пример из практики.

4. Назовите критерии практического подобия двух однотипных лопастных машин.

5. Как пересчитываются параметры модели в параметры объекта-оригинала.

6. Какие способы определения критериев подобия Вы знаете?

Вопросы к подразд.2.5

1. Дайте определение π-теоремы, поясните ее суть. Каковы положительные стороны применения π-теоремы на практике?

2. Какие переменные называют фундаментальными?

3. Какие единицы измерения называют основными?

4. Приведите формулы размерностей следующих физических величин: силы F, плотности ρ, скорости V; удельного веса γ; давления p; объемной подачи Q.

5. Назовите следствия π-теоремы. Каковы положительные стороны их применения на практике? Приведите пример.

6. Перечислите основные этапы процесса определения критериев подобия с использованием теории размерностей.

7. В чем особенности этапа выбора фундаментальных переменных исследуемого объекта?

8. Поясните на примере сущность способа определения критериев подобия с использованием теории размерностей.

9. Какие особенности решения задачи по установлению вида критериев подобия Вы можете назвать? Поясните их суть на примерах из практики.

10. Изобразите схему стенда для определения силы воздействия потока на шар. Запишите основные этапы определения критериев подобия силового взаимодействия шара с обтекающим потоком жидкости с использованием теории размерностей.

Вопросы к подразд.2.6

1. В чем суть способа определения критериев подобия из уравнений процесса?

2. В каком случае по коэффициентам уравнения можно судить о степени влияния фактора на параметр? Приведите пример.

3. Вам известно уравнение процесса в объекте исследования, в котором все факторы и параметр представлены физическими величинами. Как оценить степень влияния каждого фактора на параметр?

4. Укажите суть способа определения критериев подобия из уравнений процесса на примере шахтной пневматической установки.

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 2

1. Потеря напора H при движении жидкости по каналу являются функцией длины ℓ, гидравлического радиуса R сечения канала, скорости жидкости V и коэффициента Шези C: $H = f(\ell, R, V, C)$.

Найти безразмерные комбинации, описывающие процесс, если размерности фундаментальных физических переменных имеют вид: $[H] = L$; $[\ell] = L$; $[R] = L$; $[v] = LT^{-1}$; $[C] = L^{0,5}T^{-1}$.

2. Потери давления p при движении жидкости по трубопроводу круглого сечения являются функцией плотности жидкости ρ, длины ℓ и диаметра d трубопровода, средней скорости жидкости v: $p = f(\rho, \ell, d, v)$. Найти безразмерные комбинации, описывающие процесс, если размерности фундаментальных физических переменных имеют вид:

$$[p] = ML^{-1}T^{-2};\quad [\rho] = ML^{-3};\quad [\ell] = L;\quad [d] = L;\quad [v] = LT^{-1}.$$

3. Повышение давления Δp в трубе при прямом гидравлическом ударе $(t_{зак} < t = 2\ell / c)$, является функцией плотности жидкости ρ, модуля упругости жидкости E_0, внутреннего диаметра d и толщины стенки δ трубы, модуля упругости материала стенок трубы E, значения погашенной скорости v: $\Delta p = f(\rho, E_0, d, \delta, E, v)$. Найти безразмерные комбинации, описывающие процесс, если размерности фундаментальных физических переменных имеют вид:

$$[\Delta p] = ML^{-1}T^{-2};\quad [\rho] = ML^{-3};\quad [E_0] = ML^{-1}T^{-2};$$
$$[d] = L;\quad [\delta] = L;\quad [E] = ML^{-1}T^{-2};\quad [v] = LT^{-1}.$$

4. Скорость распространения ударной волны C, возникающей в жидкости при гидравлическом ударе, зависит от рода жидкости /плотности ρ/, материала, диаметра и толщины стенок трубы /модуля упругости материала стенок трубы E, диаметра d и толщины δ стенок трубы/, модуля упругости жидкости E_0:

$$C = f(\rho, E, d, \delta, E_0).$$

Найти безразмерные комбинации, описывающие процесс, если размерности фундаментальных физических переменных имеют вид:

$$[C] = LT^{-1};\quad [\rho] = ML^{-3};\quad [E] = ML^{-1}T^{-2};$$
$$[d] = L;\quad [\delta] = L;\quad [E_0] = ML^{-1}T^{-2}.$$

5. Сила сопротивления R при движении вязкой жидкости является функцией скорости жидкости v, живого сечения ω, плотности ρ и динамической вязкости μ жидкости, ускорения свободного падения g, давления p:

$$R = f(v, \omega, \rho, g, \mu, p).$$

Найти безразмерные комбинации, описывающие процесс, если размерности фундаментальных физических переменных имеют вид:

$$[R] = MLT^{-2};\quad [v] = LT^{-1};\quad [\omega] = L^2;\quad [\rho] = ML^{-3};$$

$$[g] = LT^{-2};\quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1};\quad [p] = ML^{-1}T^{-2}.$$

6. Расход воды Q через цилиндрический насадок является функцией диаметра $d_н$ насадка, плотности ρ и динамической вязкости μ жидкости, давления p перед насадком:

$$Q = f(d_н,\ \mu,\ \rho,\ p).$$

Найти безразмерные комбинации, описывающие процесс, если размерности фундаментальных физических переменных имеют вид:

$$[Q] = L^3T^{-1};\quad [d_н] = L;\quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1};$$
$$[\rho] = ML^{-3};\quad [p] = ML^{-1}T^{-2}.$$

7. Среднее значение ЭДС самоиндукции e_L для машин постоянного тока является функцией окружной скорости якоря V_a, длины якоря ℓ, линейной нагрузки якоря A и магнитной проводимости μ_a:

$$e_L = f(V_a,\ \ell,\ A,\ \mu_a)$$ при заданном числе витков в секции ω_c.

Найти безразмерные комбинации, описывающие процесс, если размерности фундаментальных физических переменных имеют вид:

$$[e_L] = L^2MT^{-3}I^{-1};\quad [V_a] = LT^{-1};\quad [\ell] = L;$$

$$[A] = IL^{-1};\quad [\mu_a] = LMT^{-2}I^{-2}.$$

8. Известно, что усилие избыточного давления, действующее со стороны жидкости на плоскую стенку, зависит от высоты h слоя над центром тяжести смоченной поверхности, площади S этой поверхности, плотности жидкости ρ и ускорения свободного падения g: $\mathcal{F} = f(h,\ S,\ \rho,\ g)$. Найти безразмерные комбинации, которыми описывается процесс, если размерности фундаментальных физических переменных имеют вид:

$$[\mathcal{F}] = MLT^{-2};\quad [h] = L;\quad [S] = L^2;$$

$$[\rho] = ML^{-3};\quad [g] = LT^{-2}.$$

9. Расход воды Q через прямоугольный водослив является функцией плотности ρ, вязкости μ жидкости, высоты h воды над порогом, ширины b порога и ускорения свободного падения g: $Q = f(\rho, \mu, h, b, g)$. Найти безразмерные комбинации, которыми описывают процесс, если формулы размерностей физических величин имеют вид: $[Q] = L^3T^{-1}$; $[\rho] = ML^{-3}$; $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$;

$[h] = L$; $[b] = L$; $[g] = LT^{-2}$.

10. Пластина площадью S движется относительно неподвижной смоченной жидкостью плоской поверхности со скоростью V. Толщина слоя h, вязкость μ. Усилие, приложенное к пластине определяется функцией вида $F = f(S, V, h, \mu)$. Найти безразмерные комбинации, которыми описывают процесс, если формулы размерностей физических переменных имеют вид:

$$[F] = MLT^{-2};\quad [S] = L^2;\quad [V] = LT^{-1};$$

$$[h] = L;\quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1}.$$

11. К веревке длиной R, один конец которой прикреплен к неподвижной точке, привязан камень массой m. Камень вращается со скоростью V. Ускорение свободного падения равно g, а сила натяжения веревки, определяемая в опыте, $F = f(R, m, V, g)$. Найти безразмерные комбинации, которыми можно описать процесс. Формулы размерностей физических переменных.

$$[F] = MLT^{-2};\quad [R] = L;\quad [m] = M;$$
$$[V] = LT^{-1};\quad [g] = LT^{-2}.$$

12. Расход воды Q через цилиндрический насадок зависит от его диаметра d, диаметра трубопровода D, напора перед насадком H и ускорения свободного падения g: $Q = f(d, D, H, g)$. Найти безразмерные комбинации, которыми можно описать процесс. Формулы размерностей физических переменных:

$$[Q] = L^3T^{-1};\quad [d] = L;\quad [D] = L;$$
$$[H] = L;\quad [g] = LT^{-2}.$$

13. Мощность на валу насоса N зависит от создаваемого им напора H, подачи Q, плотности жидкости ρ и ускорения свободного падения g: $N = f(H, Q, \rho, g)$. Найти безразмерные комбинации,

которыми описывается процесс, если формулы размерностей физических переменных имеют вид:

$$[N] = ML^2T^{-3}; \quad [H] = L; \quad [Q] = L^3T^{-1};$$
$$[\rho] = ML^{-3}; \quad [g] = LT^{-2}.$$

14. Время t продолжительности опорожнения вертикального цилиндрического бака зависит от диаметра D бака, уровня H жидкости, диаметра отверстия d в дне бака, ускорения свободного падения g:

$$t = f(D, H, d, g).$$

Найти безразмерные комбинации, которыми описывается процесс, если формулы размерностей физических переменных имеют вид:

$$[t] = T; \quad [D] = L; \quad [H] = L;$$
$$[d] = L; \quad [g] = LT^{-2}.$$

15. Сила сопротивления трения $F_{тр}$ тонкой прямоугольной пластины, обтекаемой потоком жидкости, зависит от площади боковых поверхностей пластины ω, плотности ρ и скорости v жидкости, ускорения свободного падения g:

$$F_{тр} = f(\omega, \rho, v, g).$$

Найти безразмерные комбинации, которыми описывается процесс. Формулы размерностей физических переменных:

$$[F_{тр}] = MLT^{-2}; \quad [\omega] = L^2; \quad [\rho] = ML^{-3};$$
$$[g] = LT^{-2}, \quad [v] = LT^{-1}.$$

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

3.1. Точечная оценка экспериментальных данных

3.1.1. Виды погрешностей

Погрешность эксперимента - это разность между данными измерения и истинным значением контролируемой величины.

Исследователь должен уметь правильно оценивать погрешности, только в этом случае по полученным данным можно будет делать достоверные выводы.

По форме представления различают абсолютные и относительные погрешности.

Абсолютная погрешность - разность между истинным значением контролируемой величины и получаемым ее значением:

$$\Delta x = x - a,$$

где x - результат измерения; a - истинное значение величины.

Относительная погрешность - истинное значение абсолютной, выраженное в долях или процентах:

$$\varepsilon_x = (\Delta x / a)\,100\,\%.$$

Погрешности делятся на систематические и случайные. Систематические ~~вызываются~~ причинами, действующими одинаково закономерно при многократном измерении данной величины в одних и тех же условиях. При этом среднее значение измерений отличается от контролируемой величины независимо от их числа.

Например, расходомером определена подача поршневого насоса. Получены шесть измерений в одном и том же режиме: Q_1 = 95,0 м³/ч; Q_2 = 95,2 м³/ч; Q_3 = 94,8 м³/ч; Q_4 = 95,1 м³/ч; Q_5 = 95,0 м³/ч; Q_6 = 94,9 м³/ч.

Истинное значение подачи Q_0 = 100 м³/ч. Среднее значение шести измерений $Q_{cp} = \sum_{i=1}^{6} Q_i / 6 = 95\ м^3/ч$. Систематическая погрешность $\Delta Q = Q_{cp} - Q_0 = 95 - 100 = -5\ м^3/ч$.

Природа систематических погрешностей обусловлена систематическими погрешностями приборов, неправильной их установкой, неправильным измерением исходных данных и погрешностей в определении расчетных коэффициентов, неучетом факторов, влияющих на показания приборов. Систематические погрешности должны быть выявлены и устранены, например тарировкой приборов, до постановки основного эксперимента. Если этого выполнить нельзя, то их обрабатывают так же, как и случайные.

Случайные погрешности являются следствием причин, действующих непредсказуемо при измерении в сторону уменьшения или увеличения результатов. Они обусловлены нечувствительностью средств измерения, конечными значениями цены деления приборов, погрешностями наблюдения, округлениями при обработке, случайными колебаниями режима работы исследуемой системы.

Например, если точное значение подачи насоса Q_0 = 100 м³/ч, а данные шести измерений соответственно равны: 105 м³/ч; 95 м³/ч; 100 м³/ч; 103 м³/ч; 99 м³/ч и 98 м³/ч, то случайные погрешности будут составлять: для первого опыта $\Delta Q_1 = 105 - 100 = 5$ м³/ч; для второго - $\Delta Q_2 = 95 - 100 = 5$ м³/ч; третьего - $\Delta Q_3 = 100 - 100 = 0$ м³/ч; четвертого - $\Delta Q_4 = 103 - 100 = 3$ м³/ч; пятого - $\Delta Q_5 = 99 - 100 = -1$ м³/ч; шестого - $\Delta Q_6 = 98 - 100 = -2$ м³/ч.

3.1.2. Распределение случайных погрешностей. Нормальный закон. Оценка измерений величины и ее погрешностей

Предположим, что прибором со случайными погрешностями бесконечное число раз измеряется какая-либо величина. Полученное в результате такого эксперимента множество называется гипотетической генеральной совокупностью. Особенность этой совокупности заключается в том, что она содержит в себе любые измерения, которые можно получить при реальном эксперименте.

Исследователь при постановке опытов делает конечное, обычно небольшое, число измерений. Их можно рассматривать как случайную выборку из гипотетической генеральной совокупности. Задача обработки сводится к определению по данным выборки показателей, оценивающих параметры генеральной совокупности. Для правильного решения этой задачи необходимо знать закон распределения величины в совокупности. Он описывается интегральной $\mathcal{F}(x)$ или дифференциальной $f(x)$ функцией распределения. Первая определяет вероятность того, что случайная величина X будет меньше заданной величины x :

$$\mathcal{F}(x) = P(X < x).$$

Дифференциальная функция, или плотность, распределения

$$f(x) = d\mathcal{F}(x)/dx. \qquad /3.1/$$

Для построения кривых, по которым можно оценить закон распределения в реальном эксперименте, необходимо провести большое число измерений. После этого поступают следующим образом. Весь диапазон значений величин делят на равные интервалы. Число интервалов рекомендуется принимать

$$K = 1 + 3,32 \lg n, \qquad /3.2/$$

где n - число измерений.

Затем для каждого интервала определяют количество приходящихся измерений n_u. Отношение этой величины к общему числу измерений n равно вероятности попадания единичных измерений в соответствующий интервал. И наконец, по полученным результатам строят графики интегрального или дифференциального закона распределения.

Проиллюстрируем сказанное примером.

Штангенциркулем 56 раз измерен диаметр стержня. Полный размах варьирования результатов составляет 51,8 - 49,0 = 2,8 мм. В соответствии с выражением /3.2/

$$K = 1 + 3,32 \lg 56 = 6,81.$$

Примем число интервалов равным семи с протяженностью каждого 2,8/7 = 0,4 мм.

Результаты измерений и вероятностей сведены в табл.3.1.

Таблица 3.1

Показатель	Диаметр стержня, мм						
	49,0 49,4	49,4 49,8	49,8 50,2	50,2 50,6	50,6 51,0	51,0 51,4	51,4 51,8
Число измерений в интервале n_i	4	7	11	16	10	6	2
Вероятность ΔF попадания в интервал	0,071	0,125	0,196	0,286	0,178	0,108	0,036
Вероятность $F(x)$ для конца интервала	0,071	0,196	0,392	0,678	0,856	0,964	1,00
Оценка $f(x)$, мм$^{-1}$	0,178	0,313	0,49	0,715	0,445	0,27	0,09

При построении графика интегрального закона распределения по оси абсцисс откладывают диаметр стержня, а по оси ординат вероятность того, что измеряемая величина будет меньше заданного уровня. В рассматриваемом случае вероятность диаметра стержня меньше 49 мм равна нулю. Менее 49,4 мм - вероятность составляет 0,071; меньше 49,8 мм - вероятность равна 0,071 + 0,125 = 0,196 и т.д. Вероятность того, что диаметр стержня не превысит 51,8 мм, равна единице. График интегрального закона распределения для условий приведенной выборки показан на рис.3.1,а.

Построение графика дифференциального закона распределения обычно начинают с построения гистограммы в координатах: измеряемая величина - число измерений в интервале /рис.3.1,б/.

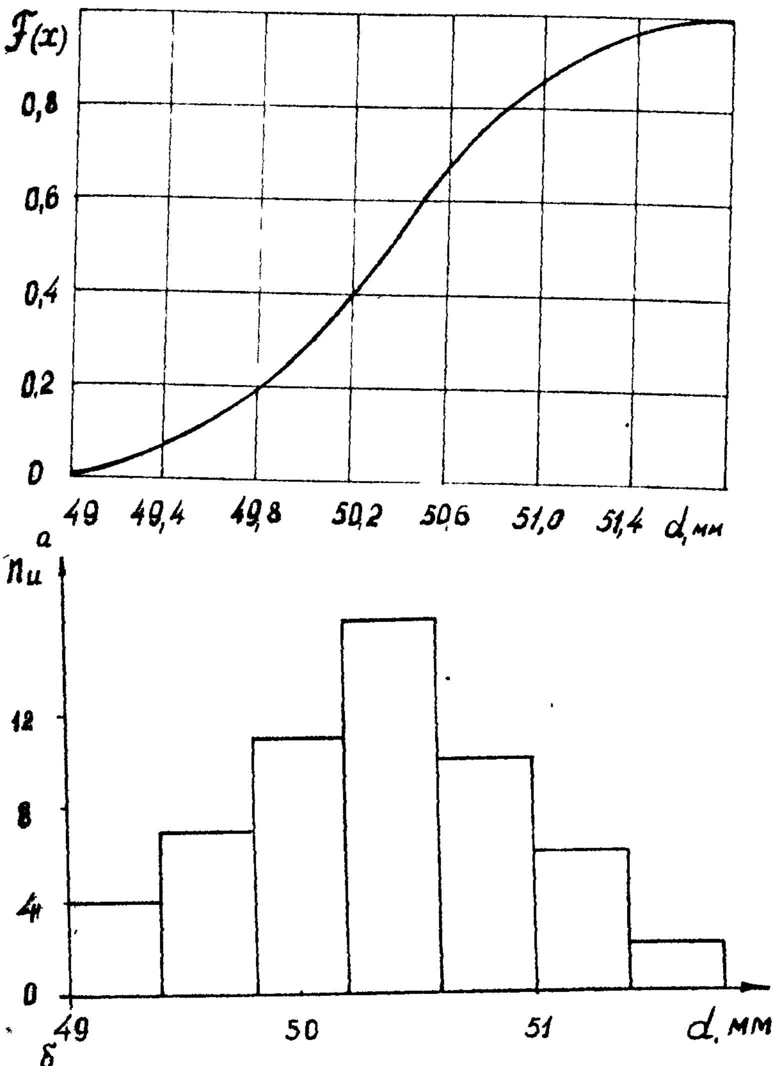
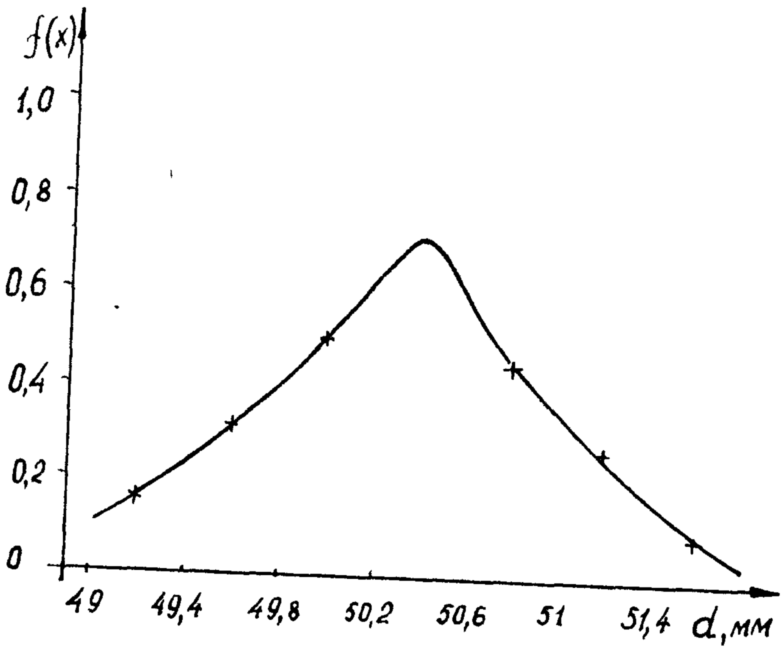


Рис.3.1. График интегрального закона распределения /а/; гистограмма распределения измерений /б/



Окончание рис.3.1. График дифференциального закона распределения /в/

Если истинное значение диаметра стержня составляет 50,4 мм, то нетрудно от измерений перейти к погрешностям. Гистограмма дает достаточно полное представление о распределении погрешностей в выборке. В рассматриваемом случае она свидетельствует, что отрицательные погрешности встречаются так же часто, как и положительные. Меньшие абсолютные значения погрешностей встречаются чаще, чем большие. В соответствии с /3.1/ плотность распределения для данного интервала определяется величиной

$$f(x) \simeq \Delta \mathcal{F}(x)/\Delta x,$$

где $\Delta \mathcal{F}(x)$ – вероятность попадания единичного измерения в данный интервал; Δx – протяженность интервала, мм.

Для построения графика дифференциального закона распределения необходимо в центре каждого интервала отложить ординату, равную отношению соответствующей вероятности $\Delta\mathcal{F}(x)$ к длине интервала. На рис.3.I,в значения $f(x)$ помечены крестиками.

В практике обработки данных эксперимента наиболее широко используется нормальный закон распределения. Кривые измерения параметров $\mathcal{F}(x)$ и $f(x)$ для нормального закона распределения на рис.3.I,а и в изображены штриховыми линиями.

Из этого рисунка видно, что распределение величин в выборке хорошо соответствует нормальному распределению.

Для нормального распределения характерна симметричность - положительные и отрицательные погрешности встречаются одинаково часто. В инженерных экспериментах в большинстве случаев можно считать, что распределение погрешностей подчиняется нормальному закону.

Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами: генеральным средним /математическим ожиданием/ μ и генеральным среднеквадратичным отклонением σ. Квадрат σ называется генеральной дисперсией.

Величина $\gamma = (\sigma/\mu)100\%$ называется коэффициентом вариации.

/ Математическое ожидание выступает как наиболее вероятное значение измеряемой величины. Дисперсия же является численной характеристикой степени рассеяния. Обычно проводится три - пять опытов. По ним определяются оценки для μ и σ.

Оценкой для математического ожидания является выборочное среднее

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} (x_i) / n, \qquad /3.3/$$

где i - порядковый номер повторного опыта; n - число повторных опытов.

Например, оценкой для математического ожидания подачи насоса при $x_1 = 105$ м^3/ч; $x_2 = 95$ м^3/ч; $x_3 = 100$ м^3/ч; $x_4 = 103$ м^3/ч; $x_5 = 99$ м^3/ч; $x_6 = 98$ м^3/ч будет

$$\bar{x} = \frac{105 + 95 + 100 + 103 + 99 + 98}{6} = 100 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Необходимо заметить, что выражение /3.3/ справедливо только в том случае, если отдельные измерения x_i обладают одинаковой вероятностью. В противном случае оценка определяется по выражению

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} P_i \, x_i, \qquad /3.4/$$

где P_i - вероятность измерения.

Пример. Определить оценку для математического ожидания производительности гидромонитора по двум измерениям: монитор работал 50 мин, за это время было отбито 20 т угля; монитор работал 10 мин и было отбито 10 т угля.

В первом случае производительность составила $\frac{20}{50} \cdot 60 = 24$ т/ч; во втором – $\frac{10}{10} \cdot 60 = 60$т/ч.

Определим математическое ожидание по /3.3/:

$$\bar{x} = \frac{24 + 60}{2} = 42 \text{ т/ч.}$$

Полученный результат является ошибочным, так как вероятность работы с производительностью 24 т/ч значительно больше, чем с производительностью 60 т/ч. Правильное значение производительности можно найти по /3.4/.

$$\bar{x} = \left[50/\left(50 + 10\right)\right] \cdot 24 + \left[10/\left(50 + 10\right)\right] 60 = 30 \text{ т/ч.}$$

Оценка генерального среднеквадратичного отклонения при равновероятных измерениях

$$S_x = + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 / n - 1}\,. \qquad /3.5/$$

Если измерения в выборке характеризуются различной вероятностью, то оценка среднеквадратичного отклонения

$$S_x = + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - \bar{x})^2}\,. \qquad /3.6/$$

Пример. Определить оценку для среднеквадратичного отклонения подачи насоса по результатам шести измерений: $x_1 = 105$ м³/ч; $x_2 = 95$ м³/ч; $x_3 = 100$ м³/ч; $x_4 = 103$ м³/ч; $x_5 = 99$ м³/ч; $x_6 = 98$ м /ч.

Ранее было установлено, что $\bar{x} = 100$ м³/ч.

В соответствии с /3.5/

$$S_x = \sqrt{\frac{((105-100)^2 + (95-100)^2 + (100-100)^2 + (103-100)^2 + (99-100)^2 + (98-100)^2}{(6-1)}} =$$

$= 3{,}577$ м³/ч.

Полученное значение является оценкой среднеквадратичной абсолютной погрешности отдельного опыта.

Мера точности среднего результата всех опытов

$$S\bar{x} = Sx / \sqrt{n} . \qquad /3.7/$$

В данном примере

$$S\bar{x} = 3{,}577/\sqrt{6} = 1{,}46 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Из /3.7/ следует, что математическое ожидание в принципе можно определить с высокой точностью даже не особенно точными приборами. Но при этом необходимо выполнить большое число независимых измерений. Например, для повышения точности $S\bar{x}$ в 10 раз число опытов необходимо увеличить в 100 раз. Рациональнее для повышения точности результата использовать более точные приборы /меньшее значение Sx /.

3.1.3. Распределение погрешностей, отличающееся от нормального

Распределение погрешностей отличается исключительным разнообразием. Ряд наиболее характерных законов подробно рассматривается в курсах математической статистики [6].

Распределения бывают симметричными и асимметричными, с одним или с несколькими максимумами, с большей или с меньшей "вершинностью". Для установления принадлежности распределения соответствующему закону необходимо провести достаточное число /обычно более 30 - 40/ опытов. Однако инженер-электромеханик, как правило, не располагает возможностью проводить такое количество измерений. В этой ситуации при отсутствии достаточно надежных данных о характере распределения следует принимать нормальный закон. Как правило, последнее не ведет к серьезным погрешностям.

В подтверждение сказанного обратимся к следующему примеру. Предположим, что для погрешностей при измерении диаметра стержня характерен равномерный закон распределения /рис.3.2/. Найдем среднеквадратичное отклонение погрешностей для последней выборки:

$$S_1 = \sqrt{\left((49{,}2-50{,}4)^2 \cdot 16 + (49{,}6-50{,}4)^2 \cdot 16 + (50-50{,}4)^2 \cdot 16\right)/55} = 0{,}807 \text{ мм}$$

Теперь будем считать, что мы не располагаем выборкой из 56 измерений, а провели всего четыре-пять параллельных опытов. Примем в такой ситуации распределение погрешностей подчиняющимся нормальному закону. Получим результат, близкий к рассчитанному по данным табл.3.1:

$$S_2 = \sqrt{(49{,}2-50{,}4)^2 6 + (49{,}6-50{,}4)^2 13 + (50-50{,}4)^2 21)/55} = 0{,}608 \text{ мм}.$$

Приняв нормальный закон, мы таким образом допустили погрешность

$$(S_1 - S_2)\,100\,\%/S_1 = (0{,}807-0{,}608)100/0{,}807 \simeq 24{,}7\%.$$

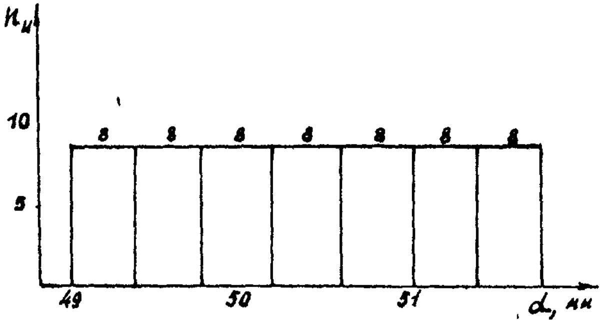


Рис.3.2. Равномерный закон распределения измерений

Подавляющее большинство распределений погрешностей менее существенно отличаются от нормального, чем равномерное. Более серьезную погрешность инженер-исследователь допускает, когда при обработке данных эксперимента вообще не пользуется математической статистикой.

3.1.4. Погрешности косвенных измерений

Часто интересующая нас величина непосредственно не может быть измерена, а определяется как функция других величин, которые находятся опытным путем. Например, расход воздуха в прямоугольном канале

$$Q = b h v_{ср},$$

где b – ширина канала, м; h – высота канала, м; $v_{ср}$ – средняя скорость воздуха, м/с.

Для определения расхода измеряют ширину, высоту канала и среднюю скорость воздуха. При измерениях величин b, h и $v_{ср}$ допускаются погрешности. Оценка их может быть выполнена по рассмотренной методике.

Погрешность определяемой величины зависит не только от погрешностей измеряемых, но и от вида функциональной связи между ними [4; 6].

Предположим, что величина, погрешность которой необходимо определить, является произвольной функцией двух измеряемых переменных x и y:

$$z = f(x, y). \tag{3.8}$$

Поставим ряд параллельных опытов и по полученным данным найдем $\bar{x}$, S_x, $\bar{y}$, S_y.

Необходимо определить S_z. Для i-го измерения $x_i = \bar{x} + \Delta x_i$, $y_i = \bar{y} + \Delta y_i$, $z_i = \bar{z} + \Delta z_i$.

Если функция /3.8/ непрерывна и во всех точках интересующего нас интервала имеет производные, то ее, как известно, можно разложить в ряд Тейлора. Выполним эту операцию и оставим в ряде только линейные члены:

$$\bar{z} + \Delta z_i = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \Delta x_i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \Delta \bar{y}_i .$$

Так как $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$,

то

$$\Delta z_i = (\partial f/\partial x)_{\bar{x},\bar{y}} \Delta x_i + (\partial f/\partial y)_{\bar{x},\bar{y}} \Delta y_i .$$

Возведем правую и левую части последнего равенства в квадрат и суммируем данные по всем измерениям:

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta z_i)^2 = (\partial f/\partial x)^2_{\bar{x},\bar{y}} \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 + 2(\partial f/\partial x)_{\bar{x},\bar{y}} (\partial f/\partial y)_{\bar{x},\bar{y}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i + (\partial f/\partial y)^2_{\bar{x},\bar{y}} \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 .$$

Если закон распределения погрешностей симметричный, например нормальный, то Δx и Δy одинаково часто встречаются как со знаком "+", так и со знаком "-". Поэтому в последнем выражении

$$2(\partial f/\partial x)_{\bar{x},\bar{y}} (\partial f/\partial y)_{\bar{x},\bar{y}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta z_i)^2 = (\partial f/\partial x)^2_{\bar{x},\bar{y}} \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 + (\partial f/\partial y)_{\bar{x},\bar{y}} \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 .$$

Последнее равенство не нарушится, если все его члены разделим на $n-1$.

Так как

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta z_i)^2/(n-1) = S_z^2;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2/(n-1) = S_x^2;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2/(n-1) = S_y^2,$$

то получим

$$S_z^2 = (\partial f/\partial x)^2_{\bar{x},\bar{y}}\, S_x^2 + (\partial f/\partial y)^2_{\bar{x},\bar{y}}\, S_y^2. \qquad /3.9/$$

Пример. Известно, что расход воды через треугольный водослив

$$Q = 1{,}343\, H^{2,47},$$

где H - уровень воды, м.

Относительная погрешность определения уровня $\varepsilon_H = 1\%$. Определить относительную погрешность расхода.

В соответствии с выражением /3.9/

$$S_Q^2 = (\partial Q/\partial H)^2_{\bar{H}}\, S_H^2.$$

Так как

$$\partial Q/\partial H = 1{,}343\cdot 2{,}47\, H^{(2,47-1)},$$

то

$$\varepsilon_Q^2 = S_Q^2/Q^2 = \left(\left(1{,}343\cdot 2{,}47\, H^{(2,47-1)}\right)^2 \Big/ \left(1{,}343\, H^{2,47}\right)^2\right) S_H^2.$$

После преобразования имеем

$$\varepsilon_Q^2 = 2{,}47^2\, S_H^2/H^2; \qquad \varepsilon_Q = 2{,}47\,\varepsilon_H.$$

Таким образом, в условиях данного примера $\varepsilon_Q = 2{,}47\%$.

3.2. Интервальные оценки измеряемых величин и их погрешностей

3.2.1. Понятие доверительного интервала. Доверительные интервалы для единичного измерения и математического ожидания

В подразд.3.1 истинное значение измеряемой величины оценивалось одним числом - математическим ожиданием $\bar{x}$. Такая оценка называется точечной.

Недостатки точечной оценки заключаются в следующем. Так как среднее $\bar{x}$ определяется по данным выборки, которая сама является случайной, то случайной будет и оценка. Если данный, и тем более другой, экспериментатор проведет новую серию опытов на том же объекте, то он получит новые результаты, которые в общем случае будут отличаться от предыдущих. При использовании точечных оценок остаются неизвестными вероятность и точность результатов обработки.

Перечисленных недостатков лишены интервальные оценки. В последнее время они широко распространены при обработке данных экспериментов. В основе интервальных оценок лежит понятие доверительного интервала.

Для раскрытия сути этого понятия обратимся к примеру подразд.3.1. Предположим, что нас интересует вероятность попадания единичного измерения диаметра стержня в интервал 49,8...51,0 мм. Для этого, как следует из табл.3.1, необходимо найти сумму вероятностей: 0,196 + + 0,286 + 0,179. Таким образом, искомая величина равна P = 0,661. Она называется доверительной вероятностью для интервала 49,8...51,0 мм, а сам интервал называется доверительным с вероятностью P = 0,661. Величина $\alpha = 1 - P$ называется уровнем значимости или риском. В рассматриваемом случае риск того, что произвольное единичное измерение не попадет в интервал 49,8...51,0 мм, составляет 1-0,661 = 0,339. Для интервала 49,4 - 51,4 мм доверительная вероятность P = 0,661 + + 0,125 + 0,107 = 0,893. Чем шире интервал, тем больше доверительная вероятность и тем меньше риск. В последнем случае он равен 0,107.

Если известен интегральный закон распределения измерений, то доверительная вероятность

$$P = \mathcal{F}(x_{max}) - \mathcal{F}(x_{min}),$$

где x_{max} - правая, верхняя граница доверительного интервала; x_{min} - левая, нижняя граница.

При известном дифференциальном законе распределения доверительная вероятность в соответствии с изложенным ранее

$$P = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)dx.$$

Обратимся к гипотетической генеральной совокупности, в которой случайные величины подчиняются нормальному закону распределения. Обычно рассматривают доверительные интервалы, симметричные относительно генерального среднего μ. Для интервала $\mu + \Delta x$ и $\mu - \Delta x$ доверительная вероятность $P = \int_{\mu - \Delta x}^{\mu + \Delta x} f(x)\,dx$, таким образом, она пропорциональна заштрихованной площади, ограниченной графиком плотности вероятности /рис.3.3/.

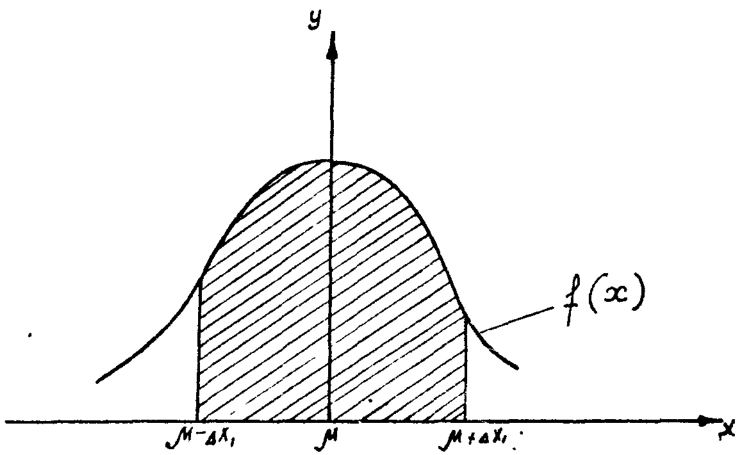


Рис.3.3. Доверительный интервал

Например, для интервала $\mu \pm \sigma$ доверительная вероятность $P = 0,68269$, а риск попадания единичного измерения за его пределы $\alpha = 1 - P \cong 0,32$. Это очень большой риск. Интервальные оценки выполняют со значительно большей вероятностью. Вероятность попадания измерения в интервал $\mu \pm 2\sigma$ составляет 0,955. Риск $\alpha = 0,045$ уже приемлем. Такой интервал широко используется в инженерной практике. Для интервала $\mu \pm 3\sigma$ риск составляет 0,0027, т.е. весьма мал. Интервалы $\mu \pm 3\sigma$ используются только в очень ответственных расчетах.

Понятие доверительного интервала тесно связано с понятием точности прибора. Класс точности прибора - это выраженная в процентах относительная предельная погрешность измерения величины, равной пределу измерения прибора. Из определения следует, что если манометр с максимальным значением по шкале 100 кгс/см^2 имеет точность 1%, то его абсолютная предельная погрешность $\Delta x_{пред} = 100 \cdot 0{,}01 = 1$ кгс/см^2. В настоящее время в измерительной технике в большинстве отраслей промышленности под предельной абсолютной погрешностью прибора понимается величина, равная двум среднеквадратичным отклонениям, т.е. $\Delta x_{пред} = 2\sigma$, что соответствует доверительной вероятности $P = 0{,}955$ и риску $\alpha = 0{,}045$.

Таким образом, для манометра, о котором речь шла ранее, $\sigma = 0{,}5$ кгс/см^2.

На практике, как уже отмечалось, экспериментатор делает небольшое /три - пять/ число измерений. При определении оценок необходимо использовать распределение Стьюдента.

Широко используют интервальные оценки для единичного измерения и математического ожидания.

Доверительный интервал для единичного измерения определяется выражением

$$\bar{x} - t_\alpha S_x \le x_i \le \bar{x} + t_\alpha S_x, \qquad /3.10/$$

а для математического ожидания -

$$\bar{x} - t_\alpha S_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + t_\alpha S_{\bar{x}}. \qquad /3.11/$$

В выражениях /3.10/ и /3.11/ t_α - критерий Стьюдента /табл.3.2/ при доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ или уровне значимости α. Это значение берется из таблиц для соответствующей доверительной вероятностей в зависимости от числа степеней свободы f.

$f = n-1$ (n - число опытов)

Таблица 3.2

f	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	60	∞
t_α	12,706	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447	2,306	2,228	2,086	2,042	2,00	1,96

Пример. По шести измерениям подачи насоса 105; 95; 100; 103; 99; 98 м^3/ч определить интервальную оценку для математического ожидания. Ранее было установлено, что для данной выборки $\bar{x} = 100$ м^3/ч и $S\bar{x}$ = 1,46 м³/ч. Для числа степеней свободы $f = n-1 = 6-1 = 5$ из табл.3.2 критерий Стьюдента t_α = 2,571.

Таким образом,

$$\bar{x} \pm t_\alpha S\bar{x} = \left(100 \pm 2{,}571 \cdot 1{,}46\right) \text{ м}^3/\text{ч},$$

или подача насоса с вероятностью 95%

$$Q = \left(100 \pm 3{,}75\right) \text{ м}^3/\text{ч}.$$

В таком виде и следует приводить конечный результат.

3.2.2. Проверка однородности результатов параллельных опытов /выявление грубых погрешностей/

Предположим, что несколько раз измеряли одну и ту же величину /поставили параллельные опыты/. Нас интересует, однородны ли результаты выборки, не допущены ли грубые ошибки /промахи/. Известно несколько методик решения поставленной задачи, и все они сводятся к определению с соответствующей вероятностью доверительного интервала. Если какой-либо результат выходит за пределы интервала, то он является грубой погрешностью, его следует исключить и оценку всех параметров выборки провести заново.

Когда случайные величины заведомо подчиняются нормальному закону распределения, следует пользоваться стандартом СЭВ СТ 545-77 "Правила оценки аномальности результатов наблюдений".

На первом этапе упорядочивают результаты измерений и записывают их в возрастающем порядке:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n.$$

Затем определяют выборочное среднее по формуле /3.3/ и выборочное среднеквадратичное отклонение по выражению /3.5/.

Для оценки принадлежности x_1 и x_n к данной совокупности вычисляются

$$U_1 = (\bar{x} - x_1) / Sx \qquad /3.12/$$

и

$$U_n = (x_n - \bar{x}) / Sx. \qquad /3.13/$$

Выбирается приемлемый с точки зрения исследователя уровень значимости /в прикладных работах обычно α = 0,05/. По таблицам находится предельное значение параметра h в зависимости от объема выборки n. При $\alpha = 0{,}05$ и $n < 20$ значение h берется из табл.3.3.

Таблица 3.3

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h	1,15	1,46	1,67	1,82	1,94	2,03	2,11	2,18	2,23
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
h	2,29	2,33	2,37	2,41	2,44	2,48	2,50	2,53	2,56

Если расчетные значения U_1 или U_n окажутся больше или равны предельному уровню h, то соответствующий результат x_1 или x_n считается аномальным. Он исключается из выборки, а расчеты выполняются заново. Вникнув в суть изложенной методики, не трудно прийти к следующему. Для соответствующего уровня значимости находят доверительный интервал с

h_1 – пред [illegible] h_i

$$x_{min} = \bar{x} - hS_x$$

и

$$x_{max} = \bar{x} + hS_x.$$

Грубой погрешностью считается величина, которая выходит за пределы доверительного интервала или лежит на его границах, т.е. если выполняются условия:

$$x_1 \le x_{min} \quad \text{или} \quad x_n \geqslant x_{max}.$$

Пример. Располагаем шестью измерениями подачи насоса: 95; 98; 99; 100; 103 и 105 м^3/ч. Необходимо с вероятностью $P = 0{,}95$ установить однородность выборки. Ранее было установлено, что для данной выборки $\bar{x} = 100$ м^3/ч, а $S_x = 3{,}577$ м^3/ч. Определим U_1 и U_6:

$$U_1 = (100 - 95)/3{,}577 = 1{,}398; \quad U_6 = (105 - 100)/3{,}577 = 1{,}398.$$

Из табл.3.3 при объеме выборки $n = 6$ предельное значение $h = 1{,}82$. Так как $U_1 = U_6 = 1{,}398 < h = 1{,}82$, то результаты измерения 95 и 105 м^3/ч не являются грубыми погрешностями.

3.2.3. Проверка однородности дисперсий

Такую операцию приходится выполнять, когда сопоставляются результаты нескольких выборок. Например, проводят испытания двух машин в одинаковых условиях, или экспериментально устанавливают связь между параметром y и фактором x. Для каждого контрольного уровня фактора с целью повышения точности результатов проводятся параллельные опыты. В первом случае располагаем двумя выборками, каждая из которых характеризуется своим математическим ожиданием и своей дисперсией. Во втором случае число выборок равно $n_ф$. Соответственно до $n_ф$ увеличивается и число дисперсий. ($n_ф$ - число уровней фактора x).

И в первом и втором случаях дисперсии будут различными. Это различие может быть статистически незначимым /дисперсии однородны/ или статистически существенным, значимым /дисперсии неоднородны/.

В последнем случае выборки сопоставлять нельзя. Дальнейшая обработка результатов эксперимента при этом недопустима.

Для проверки однородности двух дисперсий на практике наиболее часто используется критерий Фишера [5]. Этот критерий / F-критерий/ представляет отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F = S_1^2 / S_2^2 \quad \left(S_1^2 > S_2^2 \right). \qquad /3.14/$$

Расчетное значение критерия сравнивается с критическим табличным, определяемым для принятого уровня значимости и соответствующих S_1^2 и S_2^2 степеней свободы f_1 и f_2. Значение F-критерия при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ приведены в табл.3.4. Необходимо иметь в виду, что

$$F_\alpha (f_1, f_2) \neq F_\alpha (f_2, f_1). \qquad \begin{cases} f_2 = n_{м(2)} - 1 \\ f_1 = n_{м(1)} - 1. \end{cases}$$

Если расчетное значение $F < F_\alpha (f_1, f_2)$, то дисперсии однородны и вместо S_1^2 и S_2^2 необходимо пользоваться средневзвешенным значением

$$S_{св}^2 = \left(S_1^2 f_1 + S_2^2 f_2 \right) / \left(f_1 + f_2 \right). \qquad /3.15/$$

При проверке однородности трех и более дисперсий, имеющих одинаковые числа степеней свободы, используется критерий Кохрена / G-критерий/:

$$G = S_{max}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n_ф} S_i^2, \qquad /3.16/$$

F- критерий при $\alpha = 0,05$

Таблица 3.4

Числителя / Знаменателя	Число степеней свободы I	2	3	4	5	6	10	20	50	100	∞
I	I6I,00	200,00	2I6,00	225,00	230,00	234,00	242,00	248,00	252,00	253,00	254,00
2	I8,5I	I9,00	I9,I6	I9,25	I9,30	I9,35	I9,39	I9,44	I9,47	I9,49	I9,50
3	I0,I3	9,55	9,28	9,I2	9,0I	8,94	8,78	8,66	8,58	8,56	8,53
4	7,7I	6,94	6,59	6,39	6,26	6,I6	5,96	5,80	5,70	5,66	5,63
5	6,6I	5,79	5,4I	5,I9	5,05	4,95	4,74	4,56	4,44	4,40	4,36
6	5,99	5,I4	4,76	4,53	4,39	4,28	4,06	3,87	3,75	3,7I	3,67
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,34	3,I5	3,03	2,98	2,93
I0	4,96	4,I0	3,7I	3,48	3,33	3,22	2,97	2,77	2,64	2,59	2,54
20	4,35	3,49	3,I0	2,87	2,7I	2,60	2,35	2,I8	I,96	I,90	I,84
40	4,08	3,23	2,83	2,6I	2,45	2,34	2,07	I,84	I,66	I,59	I,5I
I00	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,I9	I,92	I,68	I,48	I,39	I,28
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,2I	2,09	I,83	I,57	I,35	I,24	I,00

Таблица 3.5

Числитель / Знаменатель	I	2	3	4	5	6	I0	I6	36	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8534	0,8534	0,7880	0,734I	0,6602	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,607I	0,677I	0,6025	0,5466	0,4748	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,684I	0,6287	0,5895	0,5598	0,4884	0,4366	0,3720	0,2500
5	0,84I2	0,6838	0,598I	0,5440	0,5063	0,4783	0,4II8	0,3645	0,3066	0,2000
6	0,7608	0,616I	0,532I	0,4803	0,4447	0,4I84	0,3568	0,3I35	0,26I2	0,I667
8	0,6798	0,5I57	0,4377	0,39I0	0,3595	0,3362	0,2829	0,2462	0,2022	0,I250
I0	0,6020	0,4450	0,3733	0,33II	0,3029	0,2823	0,2353	0,2032	0,I655	0,I000
I5	0,4709	0,3346	0,2758	0,24I9	0,2I95	0,2034	0,I67I	0,I429	0,II44	0,0677
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,I92I	0,I735	0,I602	0,I303	0,II08	0,0879	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,I907	0,I656	0,I493	0,I374	0,III3	0,0942	0,0743	0,04I7
30	0,2929	0,I980	0,I593	0,I377	0,I237	0,II37	0,092I	0,077I	0,0604	0,0333
40	0,2370	0,I576	0,I259	0,I082	0,0968	0,0887	0,07I3	0,0595	0,0462	0,0250
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

где S^2_{max} – наибольшее значение среди сравниваемых дисперсий;

$\sum_{i=1}^{n_{ср}} S_i^2$ – общая сумма сравниваемых дисперсий.

Табличные значения критерия Кохрена $G(f_1, f_2)$ при уровне значимости $\alpha_a = 0{,}05$ приведены в табл.3.5. Число степеней свободы для дисперсии S^2_{max} равно f_1, а* $f_2 = n_{ср}$, для сумма $\sum_{i=1}^{n_{ср}} S_i^2$ $(f_1 = n_m - 1)$ где $n_{ср}$ – общее число дисперсий.

Если числа степеней свободы дисперсий S_i^2 не одинаковы, то для сравнения используется критерий Бартрета [5]. n_m · число паралл. опытов ~~в строке~~ при уровне фактора есть S^2_{max}

3.2.4. Основы дисперсионного анализа

Дисперсионный анализ – один из важнейших разделов математической статистики. Основные идеи его рассмотрим на простейшем примере.

Предположим, что необходимо установить, влияет ли изменение в заданном интервале данного фактора x на параметр y. Установим m уровней фактора. На каждом уровне поставим по n параллельных опытов. Результаты сведем в табл.3.6.

Таблица 3.6

Уровни фактора x	Номер опыта						$\bar{y}_i$	S_i^2
	1	2	...	j	...	n		
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1n}	$\bar{y}_1$	S_1^2
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2n}	$\bar{y}_2$	S_2^2
⋮	⋮	⋮	...	...	...	⋮	⋮	⋮
i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij}	...	y_{in}	$\bar{y}_i$	S_i^2
⋮	⋮	⋮	...	...	...	⋮	⋮	⋮
m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mj}	...	y_{mn}	$\bar{y}_m$	S_m^2

8*

По результатам всех mn опытов определим среднее:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} / mn$$

и сумму квадратов отклонений:

$$Q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y})^2.$$

При уровне фактора в i-м опыте /соответствующая строка/ определим среднее:

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} / n.$$

Сумма квадратов отклонений построчных средних $\bar{y}_i$ относительно среднего всей выборки

$$Q_\varphi = \sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \qquad /3.17/$$

оценивает влияние изменения фактора на параметр.

Дисперсия влияния фактора

$$S_\varphi^2 = Q_\varphi / (m-1). \qquad /3.18/$$

Ее число степеней свободы $f_\varphi = m - 1$.

Найдем построчные суммы квадратов отклонений соответствующей группы опытов относительно своих средних $(\bar{y}_i)$:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

Дисперсии рассматриваемых выборок

$$S_i^2 = Q_i / n - 1. \qquad /3.19/$$

Они имеют число степеней свободы $f_i = n - 1$.

Суммировав Q_i, получим величину, равную вкладу погрешностей опытов в общую сумму квадратов отклонений:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{m} Q_i .$$

В математической статистике доказывается, что

$$Q = Q_\varphi + Q_0 .$$

В общем, такой результат соответствует элементарной логике: общая сумма квадратов отклонений определяется суммой квадратов отклонений, обусловленных вкладом фактора и суммой квадратов погрешностей всех видов.

Если дисперсии S_i^2 однородны, что проверяется по критерию Кохрена, то дисперсия погрешностей всех опытов /средневзвешенная дисперсия опытов/

$$S_0^2 = Q_0 / m(n-1). \qquad /3.20/$$

Из изложенного следует, что дисперсии S_φ^2 и S_0^2 однородны при

$$F = S_\varphi^2 / S_0^2 < F_\alpha \left(f_\varphi = m-1;\ f_0 = m(n-1) \right).$$

Однородность дисперсий свидетельствует, что фактор в данном интервале не влияет на параметр. И наоборот, невыполнение последнего условия является свидетельством значимого влияния фактора на параметр.

3.2.5. Сравнение двух выборочных средних

Пусть усовершенствована какая-либо машина, например выемочная. Для оценки полезности сделанного поставлен сравнительный эксперимент: проведен ряд измерений производительности до и после реконструкции. В результате эксперимента получены две выборки. Первая - число измерений n_1, математическое ожидание $\bar{x}_1$ и дисперсия S_1^2. Вторая - число опытов n_2, математическое ожидание $\bar{x}_2$, дисперсия выборки S_2^2. При этом $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$. Ставится вопрос: можно ли утверждать, что различие между $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ значимо? Иными словами, можно ли утверждать, что реконструкция дала положительные результаты?

Обозначим

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = Z. \qquad /3.21/$$

Если Z выйдет за пределы доверительного интервала

$$\mu_Z - t_\alpha S_Z \leq Z \leq \mu_Z + t_\alpha S_Z ,$$

то будет значимой величиной.

Предположим, что различие между $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ незначимо, т.е. предположим $\mu_z = 0$.

Тогда доверительный интервал

$$Z = \pm t_\alpha S_z.$$

В подразд.3.14 показано, что

$$S_z^2 = \left(\partial Z/\partial \bar{x}_1\right)^2 S_{\bar{x}_1}^2 + \left(\partial Z/\partial \bar{x}_2\right)^2 S_{\bar{x}_2}^2.$$

Из выражения /3.2I/ следует $\partial Z/\partial \bar{x}_1 = 0$ и $\partial Z/\partial \bar{x}_2 = 0$.

Тогда $\longrightarrow$ $$S_z^2 = S_{\bar{x}_1}^2 + S_{\bar{x}_2}^2.$$

Так как $S_{\bar{x}}^2 = S_x^2 / n$, то $S_z^2 = \dfrac{S_{x_1}^2}{n_1} + \dfrac{S_{x_2}^2}{n_2}$.

Если $S_{x_1}^2$ и $S_{x_2}^2$ однородны, а только в этом случае можно сравнить $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, то

$$S_z^2 = S_{cв}^2 \left(1/n_1 + 1/n_2 \right) \quad \text{или} \quad S_z = S_{cв} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}.$$

Таким образом, доверительный интервал

$$Z = \pm t_\alpha S_{cв} \sqrt{(n_1 + n_2)/n_1 n_2}. \qquad /3.22/$$

Критерий t_α берется для соответствующего уровня значимости и числа степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$.

Пример. В одинаковых условиях проведены испытания двух выемочных комбайнов. Получены следующие равновероятные данные для производительности:

до реконструкции 34; 35; 45; 56; 39; 38 т/ч;
после реконструкции 40; 45; 50; 53; 49; 47 т/ч.

Решение. Найдем оценки математических ожиданий:

$$\bar{x}_1 = \frac{34 + 35 + 56 + 45 + 39 + 38}{6} = 41{,}17 \text{ т/ч};$$

$$\bar{x}_2 = \frac{40 + 45 + 56 + 53 + 49 + 47}{6} = 47{,}33 \text{ т/ч}.$$

На первый взгляд кажется, что реконструкция привела к существенному увеличению производительности машины - на 14,9%. Проверим достоверность этого утверждения.

Использовав квадрат выражения /3.5/, найдем оценки дисперсий выборок:

$$S_1^2 = 67{,}76 \quad (\text{т/ч})^2 \qquad \text{и} \qquad S_2^2 = 20{,}27 \ (\text{т/ч})^2 .$$

Выполним проверку однородности результатов опытов. С этой целью при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим доверительный интервал для x_1 и x_2 по методике, изложенной в подразд.3.2.2.

$$x_{1(max,\ min)} = \bar{x}_1 \pm h_1 S_1 = \left(41{,}17 \pm 1{,}82 \sqrt{67{,}76} \right) =$$
$$= \left(26{,}19,\ 56{,}15\right) \text{т/ч}.$$
$$x_{2(max,\ min)} = \bar{x}_2 \pm h_2 S_2 = 47{,}33 \pm 1{,}82 \sqrt{20{,}27} =$$
$$= \left(39{,}14,\ 55{,}5\right) \text{т/ч}.$$

Таким образом, каждая выборка состоит из однородных результатов.

Проверим однородность дисперсий. Определим расчетное значение критерия Фишера:

$$F = S_1^2 / S_2^2 = 67{,}76/20{,}27 = 3{,}34.$$

Табличное значение F-критерия при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и $f_1 = f_2 = 5$ составляет 5,05. Так как расчетное значение F-критерия меньше табличного /3,34 $<$ 5,05/, то дисперсии однородны.

В соответствии с /3.15/ определяем

$$S_{св}^2 = \left(67{,}76 \cdot 5 + 20{,}27 \cdot 5 \right) / \left(5 + 5 \right) = 44{,}02 \quad (\text{т/ч})^2.$$

По уравнению /3.22/ доверительный интервал

$$Z = \pm\, 2{,}23 \quad \sqrt{44{,}02} \cdot \sqrt{\frac{6+6}{36}} = \pm\, 8{,}77 \ \text{т/ч}.$$

Так как этот интервал включает различие между оценками математических ожиданий

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 47{,}33 - 41{,}17 = 6{,}16 \ \text{т/ч},$$

то с вероятностью 0,95 экспериментальный материал не дает оснований утверждать, что реконструкция комбайна привела к значимому увеличению производительности.

3.3. Экспериментально-статистическое исследование связей

Главная задача всякого научного исследования заключается в изучении связей между явлениями, параметрами и факторами. Связи бывают функциональными и вероятностными /статистическими/. В первом случае каждому значению входной величины соответствует одно или несколько строго определенных значений выходной. Статистические же связи проявляются лишь в среднем. При этом данному значению входной величины соответствует множество значений выходной.

3.3.1. Корреляционный анализ

Корреляционный анализ - один из широко распространенных методов оценки статистических связей. Он отвечает на вопросы: влияет ли данная входная величина на выходную и какова степень /теснота/ связи между величинами?

Предположим, что имеем совокупность двух переменных y и x, состоящую из n пар. Каждому значению x соответствует свое значение y:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;$$
$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Каждую пару величин можно представить точкой на поле координат xOy /рис.3.4, а-в/. Такие рисунки в математической статистике называются диаграммами рассеивания. По ним можно судить о тесноте связи между величинами. Однако подобная оценка субъективна, необходима оценка в виде числа.

Простейшей характеристикой связи служит ковариация или момент связи /математическое ожидание/ произведения отклонений x и y от их центров:

$$cov(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n. \qquad /3.23/$$

Для случая рис.3.4,в данному значению x_i соответствует парное число одинаковых по абсолютному значению отклонений y_i от среднего $\bar{y}$. Вследствие этого $cov(x, y) = 0$.

Однако, ковариация зависит от размерностей переменных. Для перехода к безразмерной характеристике отклонения переменных нормируют

$$x^* = x_i - \bar{x}/\sigma_x\ ; \qquad y^* = y_i - \bar{y}/\sigma_y.$$

Ковариацию нормированных отклонений называют коэффициентом корреляции

$$\rho_{x,y} = cov(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n\,\sigma_x \sigma_y. \qquad /3.24/$$

Так как σ_x и σ_y неизвестны, то определяют не коэффициент корреляции, а его оценку

$$r_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n\,S_x S_y. \qquad /3.25/$$

9 - 0402ф

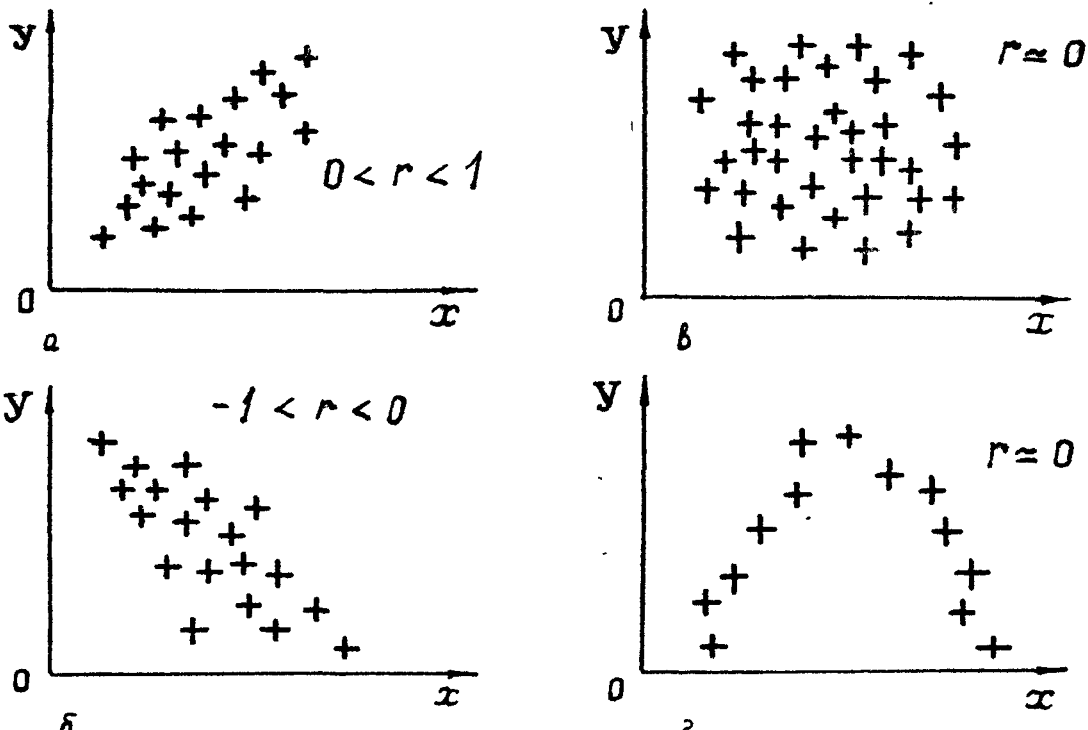


Рис.3.4. Диаграммы рассеяния

количеств.

Коэффициент корреляции является оценкой степени связи между выходной и входной переменными. В корреляционном анализе исходят из того, что как входные, так и выходные величины являются случайными. Если оценивается влияние на выходную величину одной входной, то определяется коэффициент парной корреляции. При оценке одновременного влияния нескольких входных величин на выходную находится коэффициент множественной корреляции [5].

В математическом обеспечении современных вычислительных машин разработаны стандартные программы определения коэффициентов корреляции. Горный инженер-электромеханик редко использует корреляционный анализ, поэтому остановимся лишь на сущности некоторых его моментов.

Предположим, что между y и x в интересующем диапазоне существует линейная функциональная связь

$$y = b_0 + bx. \qquad /3.26/$$

Ясно, что в этом случае

$$\bar{y} = b_0 + b\bar{x}$$

Определим разность

$$y_i - \bar{y} = b_0 + bx_i - b_0 - b\bar{x} = b(x_i - \bar{x}).$$

Связь между S_y и S_x вытекает из следующей зависимости

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = b^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Следовательно,

$$S_y^2 = b^2 S_x^2$$

и так как $S_y = \sqrt{S_y^2}$, то $S_y = |b|\, S_x$.

Подставив полученные соотношения в /3.25/, получим

$$r_{xy} = b \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) / n\, |b|\, S_x S_y.$$

При достаточно большом n

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / n = S_x^2,$$

следовательно, $r_{xy} = b/|b|.$

В случае линейной функциональной связи коэффициент корреляции равен +1 или -1 /в зависимости от знака b /.

Выясним, как повлияет на коэффициент корреляции разброс выходной величины y относительно значения, соответствующего линейной функциональной зависимости. Предположим, что некоторому значению входной величины x_1 в совокупности экспериментальных данных соответствуют две точки $y_1+\Delta y_1$ и $y_1+\Delta y_1$, где y_1 - значение по зависимости /3.26/. В числитель выражения /3.25/ входит сумма

$$(x_1-\bar{x})(y_1+\Delta y_1-\bar{y})+(x_1-\bar{x})(y_1-\Delta y_1-\bar{y})$$

Она равна

$$2(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y}).$$

Таким образом, указанный разброс не изменит числителя выражения /3.25/. В знаменателе находится $S_y=+\sqrt{S_y^2}$. Вклад рассматриваемых точек в S_y определяется суммой

$$(y_1+\Delta y_1-\bar{y})^2+(y_1-\Delta y_1-\bar{y})^2.$$

Последняя величина больше $2(y_1-\bar{y})^2$, так как сумма квадратов двух чисел всегда больше удвоенного квадрата их полусуммы. Таким образом, разброс выходной величины относительно значения, соответствующего линейной функциональной зависимости, приведет к уменьшению абсолютного значения коэффициента корреляции. Чем больше этот разброс, тем меньше $|r_{xy}|$. В общем случае $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. Совокупность экспериментальных точек показана на рис.3.4,а, из которого видно, что с ростом x усредненные значения y возрастают. Для такой совокупности $0<r_{xy}<1$. Для совокупности, изображенной на рис.3.4,б, $-1<r_{xy}<0$.

Если усредненные значения y для данных x не изменяются /см. рис.3.4,в/, то $r_{xy}\cong 0$. Коэффициент корреляции может быть равен нулю и в случае функциональной зависимости y от x, если эта зависимость нелинейная /рис.3.4,г/.

Значимость коэффициента корреляции проверяется по выражению

$$|r_{xy}|\sqrt{n-2}\,/\sqrt{1-r_{xy}^2}>t_\alpha, \qquad /3.27/$$

где t_α - табличное значение критерия Стьюдента для $f=n-2$ и соответствующего уровня значимости α.

Пример. При испытаниях гидроимпульсной установки на гидрошахте "Пионер" получена выборка зависимости равновероятных производительностей гидроотбойки от средневзвешенного расстояния между насадком и забоем /рис.3.5/. Данные эксперимента свидетельствуют, что следует ожидать при обработке достаточно большого отрицательного коэффициента корреляции. Расчет, выполненный по /3.25/ показал, что $r_{xy} = -0,804$. Параметр оценки значимости коэффициента в соответствии с выражением /3.27/

$$0,804\sqrt{20-2} \,/\, \sqrt{1-0,804^2} = 5,73.$$

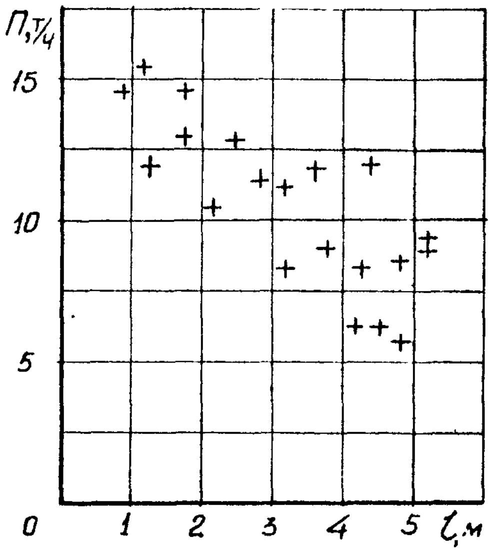


Рис.3.5. Зависимость производительности гидроотбойки от расстояния гидромонитора до груди забоя

Так как табличное значение критерия Стьюдента для уровня значимости $\alpha = 0,05$ при $f = n-2 = 20 - 2 = 18$ составляет 2,10, то коэффициент корреляции является значимым.

3.3.2. Регрессионный анализ

Целью регрессионного анализа является установление аналитической зависимости между выходной и входными величинами. При проведении исследований инженеру-электромеханику часто приходится решать подобные задачи. Известно, что в общем случае зависимость между величинами может быть представлена таблично, графически и аналитически. Первый способ облегчает определение выходной величины для приведенных в таблице значений входных; графический - создает наглядность представления. Аналитическая зависимость позволяет исследовать функцию методами математического анализа, т.е. определить значения максимума, минимума, точек перегиба и т.д. Без аналитической зависимости осложняется исследование систем регулирования, проведения расчетов на ЭВМ. Эта зависимость наиболее универсальна, из нее просто получить табличную и графическую. Если входных величин более двух, то табличное и графическое представления теряют наглядность.

В регрессионном анализе в отличие от корреляционного только выходные величины являются случайными. Входные же должны быть неслучайными и некоррелированными между собой.

Необходимо иметь в виду, что если теоретические формулы, полученные на основе знания законов определенного процесса, могут быть использованы при произвольных значениях аргумента, то эмпирические, полученные обработкой данных измерений, являются приближенными и могут применяться лишь в четко определенных условиях и в строго ограниченных пределах аргумента. Один и тот же процесс может быть описан несколькими эмпирическими формулами.

Задача получения аналитической зависимости включает в себя три этапа: выбор вида уравнения регрессии; определение коэффициентов уравнения; проверка соответствия установленной зависимости эксперименту [5 - 8].

Первый этап является неформализованной процедурой. Здесь многое зависит от опыта исследователя. Уже отмечалось, что один и тот же процесс может быть описан различными эмпирическими зависимостями. На практике при выборе вида уравнения обычно руководствуются следующим. По данным эксперимента первоначально строят "пробную" графическую зависимость. Ее сравнивают с различными кривыми, уравнения которых известны, и останавливаются на наиболее вероятной.

Для получения наглядной картины и облегчения выбора правильной аналитической зависимости график следует строить в прямоугольной системе координат первоначально с равномерными шкалами на осях.

Масштабы на осях координат определяются по следующим выражениям:

$$m_x = L_x / (x_{кон} - x_{нач}) \quad и \quad m_y = L_y / (y_{кон} - y_{нач}),$$

где $x_{нач}$, $x_{кон}$, $y_{нач}$, $y_{кон}$ - начальные и конечные значения аргумента и функции в условиях эксперимента; L_x, L_y - длины шкал.

Длины шкал определяются условиями размеров чертежа. При этом масштабы должны быть округленными.

Выбирая m_x и m_y, следует иметь в виду, что их уменьшение ведет к снижению точности обработки. Масштабы следует принимать такими,чтобы погрешность измерения на чертеже изображалась отрезком не менее 1 мм. Чрезмерное увеличение масштабов ведет к подчеркиванию случайных отклонений опытных точек, что затрудняет выбор правильной аналитической зависимости. Соотношение между m_x и m_y должно обеспечить примерно одинаковый наклон экспериментальной линии к осям координат.

Если график не имеет максимума, минимума или других особенностей, то для получения приемлемой точности и снижения объема вычислений при построения искомой зависимости достаточно ограничиться 4-6 и максимум 10 точками. При наличии в исходном экспериментальном материале большого числа точек следует их группировать.

Если в результате построений окажется, что некоторые точки существенно отклонялись от общей зависимости, то следует проверить вычисления для них, а при необходимости повторить эксперимент.

Проведенная по экспериментальным данным "пробная" кривая должна быть плавной, проходить возможно ближе ко всем точкам. Ее следование за каждой точкой подчеркивает случайные изменения и искажает искомую зависимость.

В ряде случаев может оказаться, что еще до обработки экспериментальных данных известна, пусть даже примерная, теория исследуемого процесса. В этом случае функциональная зависимость, определяемая этой теорией, может дать представление о возможном виде эмпирической формулы.

Например, известно, что теоретическая напорная характеристика турбомашины при постоянной частоте вращения является прямой линией. Известно также, что потери напора в турбомашине пропорциональны квадрату расхода. В этих условиях при выборе формулы для описания экспериментальной напорной характеристики наиболее целесообразна ориентация на квадратичные зависимости.

При выборе формулы нет необходимости ориентироваться на сложные зависимости. Дело в том, что, с одной стороны, любая, полученная в результате математической обработки экспериментальных данных формула будет только приближенно отражать суть процесса. Ценность формулы определяется не сложностью, а той погрешностью, которая допускается при ее применении. С другой стороны, для сложных зависимостей резко возрастает объем вычисленных и других операций ~~для~~ по определению параметров, характеризующих изучаемый процесс.

При рассмотрении вопроса определения коэффициентов уравнения регрессии считаем необходимым первоначально обратить внимание на следующее. Выбрав вид уравнения, эту задачу решают на ЭВМ по стандартным программам. Поэтому нет необходимости приводить выкладки, а можно ограничиться вскрытием сущности процедуры определения коэффициентов на предельно простом примере - линейной зависимости.

Известно, что линейная зависимость описывается уравнением

$$y = b_0 + b_1 x, \qquad /3.28/$$

где y - искомая функция /выходная величина/; x - аргумент /входная величина/; b_0, b_1 - коэффициент регрессии /постоянные величины/.

Наиболее достоверные значения коэффициентов получаются при использовании для их определения метода наименьших квадратов.* Суть его сводится к тому, что коэффициенты ищутся такими, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных значений функции от значений, вычисленных по эмпирической формуле, оказалась минимальной. (*МНК)

Применительно к зависимости /3.28/

$$\sum_{u=1}^{n} \left[y_u - (b_0 + b_1 x_u) \right]^2 = min. \qquad /3-29/^*$$

где y_u- значение функции в эксперименте при $x = x_u$; $b_0 + b_1 x_u$ - значение функции по эмпирической формуле. $\sum_{u=1}^{n} [y_u - (b_0 + b_1 x_u)]^2 = F(b_0, b_1)$

Сумма квадратов отклонений для совокупности экспериментальных данных является функцией двух параметров b_0 и b_1.(*) Она будет иметь минимум, когда ее частные производные по b_0 и b_1 соответственно равны нулю, т.е. когда соблюдаются условия:

$$\frac{\partial F}{\partial b_0} = \partial \Sigma / \partial b_0 = -2 \sum_{u=1}^{n} \left[y_u - (b_0 + b_1 x_u) \right] = 0; \qquad /3.29/$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1} = \partial \Sigma / \partial b_1 = 2 \sum_{u=1}^{n} \left[y_u - (b_0 + b_1 x_u) \right] x_u = 0. \qquad /3.30/$$

Из уравнений /3.29/ и /3.30/ следует, что сумма квадратов отклонений будет минимальной, когда b_0 и b_1 определяются из выражений:

$$\sum_{u=1}^{n} y_u - n b_0 - b_1 \sum_{u=1}^{n} x_u = 0; \qquad /3.31/$$

$$\sum_{u=1}^{n} y_u x_u - b_0 \sum_{u=1}^{n} x_u - b_1 \sum_{u=1}^{n} x_u^2 = 0. \qquad /3.32/$$

В практике математической обработки опытных данных широко используются нелинейные формулы с двумя параметрами, достаточно просто преобразуемые к линейному виду.

К ним относится распространенная в гидравлическом эксперименте параболическая зависимость вида

$$y = b_0 + b_1 x^2.$$

Подставив в последнее выражение $Z = x^2$, получим линейную зависимость вида /3.28/. Параметры b_0 и b_1 теперь можно определить, решив систему уравнений /3.31/ и /3.32/. С учетом изложенного

$$\sum_{u=1}^{n} y_u - n b_0 - b_1 \sum_{u=1}^{n} x_u^2 = 0; \qquad /3.33/$$

$$\sum_{u=1}^{n} y_u x_u^2 - b_0 \sum_{u=1}^{n} x_u^2 - b_1 \sum_{u=1}^{n} x_u^4 = 0. \qquad /3.34/$$

Проверка соответствия установленной зависимости экспериментальному материалу /проверка адекватности/ включает в себя три этапа.

<u>Первый этап.</u> Ищется остаточная дисперсия, или дисперсия адекватности:

$$S_{ad}^2 = \sum_{u=1}^{n} (y_u - \hat{y}_u)^2 / f, \qquad /3.35/$$

где y_u - экспериментальное значение выходной величины для соответствующего значения x_u; $\hat{y}_u$ - рассчитанное по уравнению регрессии значение функции для данного x_u; n - число опытов; $f = n - \ell$ - число степеней свободы; ℓ - число коэффициентов в уравнении регрессии.

Уже по S_{ad}^2 можно судить о степени соответствия уравнения экспериментальному материалу. Ведь $\sqrt{S_{ad}^2}$ - среднеквадратичное отклонение экспериментальных точек от значений, полученных по уравнению.

<u>Второй этап.</u> Определяется дисперсия воспроизводимости. На каждом уровне аргумента x_u проводится несколько параллельных опытов, ищутся дисперсии для каждой группы экспериментов, проверяется их однородность и затем определяется средневзвешенная дисперсия $S_{св}^2$ /см. подразд.2.6/. Она и является дисперсией воспроизводимости $S_в^2 = S_{св}^2$.

Если параллельные опыты не проводятся, то в качестве средневзвешенной дисперсии принимается

$$S_в^2 = (\Delta y_{пред}/2)^2,$$

где $\Delta y_{пред}$ - предельная абсолютная погрешность определения выходной величины.

Ранее было показано, что с доверительной вероятностью 0,955 можно считать предельную погрешность $\Delta y_{пред} = 2\sigma_y$.

Число степ. своб. $S_{св}^2 = S_в^2$ $(f_в = m(n_u' - 1)$
m - число уровней фактора
n_u' число паралл. опытов
при u-ом уровне фактора.

Третий этап. Проверяется однородность дисперсий адекватности и воспроизводимости.

Если расчетное значение критерия Фишера окажется меньше табличного, то полученное уравнение регрессии адекватно эксперименту:

$$F_{расч} = S^2_{ад} / S^2_{в} < F^{табл}_{\alpha}(f_{ад}, f_в), \qquad /3.36/$$

где $F_\alpha(f_{ад}, f_в)$ – берется из таблиц с учетом принятого уровня значимости для соответствующих степеней свободы $f_{ад} = n - \ell$ и $f_в = \sum_{u=1}^{n}(N_u - 1)$. ($f_в = m(N_u - 1)$, $f_в = \infty$)

Здесь N_u – число параллельных опытов на каждом уровне аргумента.

Пример. В результате испытаний центробежного насоса установлено, что создаваемые им напоры при соответствующих подачах определяются значениями, приведенными в табл.3.7.

Таблица 3.7

Q, м³/ч	10	20	30	40	50
H, м вод.ст.	88	84	74	65	52

Известно также, что напор определен ~~с точностью $\Delta H_{пред}$ = 2,5 м вод.ст.~~ Требуется установить аналитическую зависимость напора H от подачи Q.

Для выбора вида формулы изобразим табличные данные графически. Наименьшее значение подачи при эксперименте $Q_{нач}$ = 10 м³/ч мало отличается от нуля по сравнению с наибольшим $Q_{кон}$ = 50 м³/ч. Поэтому градуировку шкалы подачи начнем с нулевого значения. Примем длину L_Q = 100 мм. Тогда

$$m_Q = \frac{L_Q}{Q_{кон} - 0} = \frac{100}{50} = 2 \text{ мм/(м}^3\text{/ч)}$$

Для напора градуировку шкалы начнем с 50 м вод.ст. Примем длину шкалы L_H = 100 мм. В этом случае

$$m_H = \frac{L_H}{H_{кон} - H_{нач}} = \frac{100}{88 - 52} = 2{,}778 \text{ мм/м вод.ст.}$$

* Принимаем m_H = 2 мм/м вод.ст. Тогда предельная погрешность в определении напора $\Delta H_{пред}$ = 2,5 м вод.ст. на графике будет изображаться отрезком 5 мм.

10 – 04021р

Если $S_в^2 = \left(\frac{\Delta y_{пред}}{2}\right)^2$, то в случае !!!

$f_в = \infty$ ($\Delta y_{пред} = 2{,}5$ при $n = \infty$)

Учитывая, что процессы, протекающие в насосе, дают основание предполагать между напором и подачей квадратичную зависимость, найдем коэффициенты уравнения вида

$$\hat{H}_1 = b_0' + b'Q^2.$$

По данным эксперимента определим в дополнение к известным

$$\sum_{u=1}^{5} H_u \quad \text{и} \quad \sum_{u=1}^{5} Q_u^2:$$

$$\sum_{u=1}^{n=5} Q_u^4 = 9790000\ (\text{м}^3/\text{ч})^4,$$

$$\sum_{u=1}^{5} H_u Q_u^2 = 343000\ (\text{м вод.ст.})\cdot(\text{м}^3/\text{ч})^2.$$

Подставив в уравнения /3.33/ и /3.34/ значение соответствующих величин, получим

$$363 - 5b_0' - 5500b' = 0;$$
$$343000 - 5500b_0' - 9790000b' = 0.$$

Решение данной системы уравнений дает следующие результаты:

$$b_0' = 89{,}16 \text{ м вод.ст.};$$
$$b' = -0{,}0150 \text{ м вод.ст.}/(\text{м}^3/\text{ч}).$$

Таким образом,

$$\hat{H}_1 = 89{,}16 - 0{,}015Q^2. \qquad /3.38/$$

На рис.3.6 зависимость /3.38/ изображена сплошной линией.

Дисперсия адекватности /табл.3.8/.

$$S_{ag}^2 = \frac{3{,}9484}{5-2} = 1{,}316\ (\text{м вод.ст.})^2.$$

Расчетное значение критерия Фишера

$$F_p = \frac{1{,}316}{1{,}5625} = 0{,}842.$$

Так как оно меньше табличного $F_\alpha^{табл} = 2{,}6$, то полученная нами зависимость /3.38/ адекватна экспериментальному материалу.

Вопросы к разделу 3

Вопросы к подразд.3.I.I

I. Дайте определение понятия "эксперимент".

2. Что такое уровень фактора и параметра?

3. Дайте определения понятия "погрешность эксперимента".

4. Приведите классификацию погрешностей по форме их представления.

5. Запишите определения абсолютной и относительной погрешностей. Формулы для их вычисления.

6. По какому признаку погрешности подразделяются на случайные и систематические?

7. Дайте определение случайной погрешности. Какова природа этих погрешностей? Приведите примеры из практики.

8. Запишите определение систематической погрешности. Какова природа систематических погрешностей. Приведите примеры из практики определения систематической погрешности.

9. Как выявляются и устраняются систематические погрешности? Как поступают в случаях, когда систематические погрешности устранить нельзя?

Вопросы к подразд.3.I.2

I. Дайте определение гипотетической генеральной совокупности. Какова ее особенность?

2. Почему совокупность результатов опытов, поставленных на практике, рассматривают как случайную выборку из гипотетической генеральной совокупности?

3. Как решается задача определения по данным выборки показателей, оценивающих параметры генеральной совокупности?

4. Какие функции распределения Вы знаете?

5. Запишите математические выражения для интегральной $\mathcal{F}(x)$ и дифференциальной $f(x)$ функций.

6. Как определяют число интервалов, на которые делится весь диапазон изменения измеряемой величины?

7. Проиллюстрируйте на примерах построение графика интегрального и дифференциального законов распределения случайных погрешностей.

8. Как по гистограмме числа измерений можно судить о распределении погрешностей в выборке?

9. Изобразите графики интегральной $\mathcal{F}(x)$ и дифференциальной $f(x)$ функций распределения случайных погрешностей при нормальном законе.

10. Какие законы распределения величин в совокупности /выборке/ Вы можете назвать?

11. Назовите характерные признаки нормального закона распределения.

12. Назовите параметры, характеризующие нормальное распределение.

13. Что такое оценка математического ожидания генеральной совокупности? Как она определяется при равновероятных и разновероятных опытах?

14. Что такое оценка генерального среднеквадратичного отклонения? Как она определяется при равновероятных и разновероятных опытах?

15. Что такое мера точности среднего результата всех опытов? Как она определяется, что отражает?

Вопросы к подразд.3.1.4

1. В чем суть понятия "погрешность косвенных измерений"? От каких факторов зависит ее значение?

2. Запишите формулу для определения оценки среднеквадратичного отклонения величины Z, являющейся произвольной функцией двух измеряемых переменных X и Y.

3. Приведите пример определения погрешности косвенных измерений из Вашей практики.

4. Напор насоса определяется по формуле $H = 10^{-4}\rho + 0{,}0136\,h$ /ρ - показание манометра, Па; h - показание вакуумметра, мм рт.ст./. Среднеквадратичная погрешность в определении давления S_ρ = 500 Па, а в определении вакуума S_h = 30 мм рт.ст. Определить оценку погрешности напора S_H.

Вопросы к подразд.3.2.1

1. В чем суть недостатков точечного метода оценки экспериментальных данных?

2. Какое понятие лежит в основе интервальной оценки измеряемых величин и их погрешностей?

3. Что такое доверительная вероятность для интервала?

4. Что такое уровень значимости или риск и как они определяются?

5. Дайте определение понятия доверительного интервала.

6. Каковы соотношения между шириной интервала, величиной доверительной вероятности и уровня значимости?

7. Запишите выражение для доверительной вероятности при интегральном законе распределения измерений.

8. Чему равна доверительная вероятность при дифференциальном законе распределения измерений?

9. Запишите значение доверительной вероятности для интервала

$$(\mu + \Delta x,\ \mu - \Delta x).$$

10. Каково значение доверительной вероятности для интервала

$$(\mu + 2\sigma,\ \mu - 2\sigma)?$$

11. Какова связь между понятиями "доверительный интервал" и "точность прибора"?

12. Запишите определение понятия "класс точности прибора".

13. Определите абсолютную предельную погрешность вольтметра, класс точности которого 2,5, а предел измерения 300 В.

14. Какое распределение необходимо использовать при интервальной оценке измеряемых величин и их погрешностей?

15. Запишите выражение доверительного интервала для единичного измерения.

16. Как определяется доверительный интервал для математического ожидания?

17. С учетом каких факторов выбирается значение критерия Стьюдента при определении доверительных интервалов для единичного измерения и математического ожидания?

18. От каких факторов зависит величина доверительного интервала для единичного измерения?

19. От каких факторов зависит величина доверительного интервала для математического ожидания?

Вопросы к подразд.3.2.2

1. Поясните суть понятия "параллельные опыты".

2. С какой целью выполняется проверка однородности параллельных опытов?

3. Назовите основные этапы проверки однородности параллельных опытов в соответствии со стандартом СЭВ СТ 545-77 "Правила оценки аномальности результатов наблюдений".

4. Какой результат опыта считается грубой погрешностью?

5. Приведите пример проверки однородности параллельных опытов из Вашей практики.

Вопросы к подразд.3.2.3

1. В каких случаях проводится проверка однородности дисперсий?

2. Какие дисперсии считаются однородными, и какие - неоднородными?

3. Перечислите критерии, которые используются на практике для проверки однородности дисперсий.

4. Назовите основные этапы проверки однородности дисперсий с использованием критерия Фишера.

5. Запишите соотношение между расчетным и табличным значением критерия Фишера, если дисперсии неоднородны.

6. Что характеризует средневзвешенная дисперсия и как она определяется при использовании критерия Фишера?

7. Как вычислить расчетное значение критерия Кохрена G при проверке однородности дисперсий?

8. При каком условии проверка однородности дисперсий выполняется с использованием критерия Кохрена?

9. При каком условии для проверки однородности дисперсий используют критерий Бартрета?

10. От каких факторов зависит табличное значение критерия Фишера?

11. Каково соотношение между расчетным и табличным значениями критерия Фишера при однородных дисперсиях?

12. От каких факторов зависит табличное значение критерия Кохрена?

Вопросы к подразд.3.2.4

1. Цели дисперсионного анализа.

2. В чем суть основных идей дисперсионного анализа?

3. Запишите выражение для определения среднего $\bar{y}$ всех mn опытов.

4. В соответствии с каким выражением определяется сумма квадратов отклонений результатов всех mn опытов относительно среднего $\bar{y}$ и что она оценивает?

5. Что оценивает при проведении дисперсионного анализа сумма квадратов отклонений построчных средних $\bar{y}_i$ относительно средней всей выборки $\bar{y}$: $Q_ф = \sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_i - \bar{y})^2$?

6. Что оценивают при дисперсионном анализе построчные суммы квадратов отклонений соответствующей группы опытов относительно своих средних $\bar{y}_i$:

$$Q_i = \sum_{i=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 ?$$

7. О чем свидетельствует однородность дисперсий влияния фактора $S^2_{ф}$ и средневзвешенной дисперсии всех опытов S^2_0 ?

Вопросы к подразд.3.2.5

1. Что понимают под выборочным средним?

2. С какой целью проводится сравнение двух выборочных средних?

3. Запишите формулу для определения доверительного интервала для разности двух выборочных средних.

4. От каких факторов зависит величина доверительного интервала для разности двух выборочных средних?

5. Чему равно число степеней свободы для выбора значения критерия Стьюдента при определении доверительного интервала для $\bar{Z}$?

6. При каком условии различие между выборочными средними $\bar{X}_2$ и $\bar{X}_1$ значимо?

7. Перечислите основные этапы проведения сравнения двух выборочных средних.

8. С какой целью при сравнении выборочных средних выполняется проверка однородности результатов опытов в выборках?

9. С какой целью при сравнении выборочных средних выполняется проверка однородности дисперсий?

10. С использованием какого критерия выполняется проверка однородности дисперсий?

11. Каково соотношение между расчетным и табличным значениями F-критерия при однородных дисперсиях?

12. Запишите выражение для определения средневзвешенной дисперсии.

Вопросы к подразд.3.3.1

1. Назовите главную задачу всякого научного исследования.

2. Чем характерны функциональные и статистические связи?

3. Для оценки каких связей применяют корреляционный анализ?

4. Что такое диаграмма рассеяния? Какова ее роль в корреляционном анализе?

5. Назовите количественную оценку степени связи между входной и выходной величинами. Запишите формулу для определения этой оценки.

6. Какой недостаток присущ ковариации $cov(x, y)$?

7. Что характеризует коэффициент корреляции и как он определяется?

8. В каких случаях определяются коэффициенты парной и множественной корреляции?

9. В чем различие между коэффициентом корреляции и его оценкой?

10. В каких пределах лежит значение коэффициента корреляции, о чем оно свидетельствует?

11. Как влияет на значение коэффициента корреляции разброс выходной величины относительно значения, соответствующего линейной функциональной зависимости?

12. Изобразите диаграммы рассеяния для случаев: $0 < r < 1$; $-1 < r < 0$; $r \approx 0$.

13. Как осуществляется проверка значимости коэффициента корреляции?

Вопросы к подразд.3.3.2

1. Цель регрессионного анализа.

2. Требования к входным и выходным величинам в корреляционном и регрессионном анализе.

3. Какие Вы знаете способы представления зависимости между входными и выходными величинами? Достоинства и недостатки каждой из этих зависимостей.

4. Особенности применения теоретических и эмпирических формул.

5. Может ли один и тот же процесс быть описан несколькими эмпирическими формулами?

6. Назовите основные этапы получения регрессионной зависимости.

7. Каковы характерные особенности этапа выбора вида уравнения регрессии?

8. С какой целью по данным эксперимента первоначально строят "пробную" графическую зависимость?

9. С какой целью график следует строить в прямоугольной системе координат первоначально с равномерными шкалами по осям?

10. Какими рекомендациями следует руководствоваться при выборе масштабов по осям при построении "пробной" графической зависимости?

11. Как следует проводить по экспериментальным данным "пробную" кривую?

12. В чем суть метода наименьших квадратов при определении коэффициентов уравнения регрессии?

13. Назовите основные этапы проверки адекватности уравнения регрессии экспериментальному материалу.

14. Что отражает дисперсия адекватности и как она определяется?

15. Как определяется число степеней свободы для дисперсии адекватности?

16. Что отражает дисперсия воспроизводимости и как она определяется в случае постановки параллельных опытов?

17. Как определяется дисперсия воспроизводимости в случае, когда параллельные опыты не проводились?

18. В чем суть проверки однородности дисперсий адекватности и воспроизводимости?

19. Как определяется число степеней свободы для дисперсии воспроизводимости в случае постановки параллельных опытов?

20. Чему равно число степеней свободы для дисперсии воспроизводимости в случае, когда параллельные опыты не проводились?

21. С использованием какого критерия проверяется однородность дисперсий адекватности и воспроизводимости?

22. Каково соотношение между расчетным и табличным значениями F-критерия, если уравнение регрессии адекватно эксперименту?

23. От каких факторов зависит табличное значение F-критерия при проверке адекватности уравнения регрессии?

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 3

M_x, S_x и $S_{\bar{x}}$

2 * Задача I. Определить оценки для математического ожидания производительности гидромонитора по следующим измерениям /табл.3.9/.

Таблица 3.9

Вариант	Измерение № I		Измерение № 2		Измерение № 3		Измерение № 4		Математическое ожидание производительности гидромонитора, т/ч
	Время работы, мин	Отбито угля, т	Время работы, мин	Отбито угля, т	Время работы, мин	Отбито угля, т	Время работы, мин	Отбито угля, т	
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
I	I5	I8	I8	24	50	62	32	28	
2	I0	I4	I5	I8	40	36	35	35	
3	5	I8	I2	I9	28	25	42	34	
4	60	28	I6	I9	30	27	25	20	
5	32	24	27	I8	35	28	25	40	
6	40	38	32	27	22	I8	52	45	

Окончание табл.3.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	18	16	25	29	32	27	45	36
8	22	17	28	23	19	18	55	42
9	15	19	50	42	32	28	17	18
10	25	30	20	18	35	29	45	41
11	22	16	32	21	42	32	28	32
12	20	12	36	32	45	37	32	24
13	18	16	42	20	52	38	35	26
14	16	18	45	26	55	42	42	28
15	14	17	52	32	42	39	45	32
16	12	15	55	36	18	17	46	33
17	10	18	32	20	54	35	48	36
18	27	19	42	38	74	62	25	16
19	17	19	25	22	55	39	32	26
20	14	18	32	25	52	34	37	25
21	11	17	35	32	42	34	52	38
22	8	15	44	28	19	14	30	26
23	5	15	47	32	26	28	35	24
24	19	13	51	43	78	67	37	34
25	16	17	33	25	83	71	44	32
26	27	20	70	62	41	30	32	21
27	39	27	29	23	23	17	58	41
28	51	43	47	31	62	53	29	18

Задача 2. Определить оценку для среднеквадратичного отклонения подачи насоса по результатам измерений /табл.3.10/.

Таблица 3.10

Вариант	Подача, м^3/ч							
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	115	95	120	103	99	108	89	123
2	82	79	78	84	80	84	75	89
3	62	68	64	63	59	62	53	56
4	125	128	122	115	129	119	112	132
5	289	290	300	295	312	296	275	305
6	144	136	153	154	148	142	156	-
7	135	125	132	131	129	128	119	-
8	115	110	107	123	109	99	101	-
9	212	192	204	206	198	197	-	-
10	52	49	52	54	49	53	-	-
11	62	56	59	65	58	64	57	61

Окончание табл.3.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	75	69	72	78	69	77	–	–
13	329	330	345	335	341	343	325	340
14	279	280	295	285	291	293	275	301
15	254	255	270	260	266	258	–	–
16	92	88	94	96	89	92	82	98
17	102	98	104	103	99	114	110	95
18	229	236	242	245	242	233	234	–
19	189	190	203	209	207	210	193	–
20	169	164	173	169	152	155	171	–
21	133	124	118	129	129	119	115	–
22	91	78	79	87	82	94	85	95
23	69	58	63	64	67	60	56	71
24	325	339	340	307	319	322	315	343
25	510	486	498	509	493	512	–	–
26	445	426	429	437	448	439	–	–
27	301	287	307	294	305	298	280	309
28	161	142	158	167	159	149	140	153

3* Задача 3. На основе исходных данных /табл.3.11/ определить оценку относительной погрешности.

Таблица 3.11

Вариант	Параметр и его обозначение	Формула, по которой определяется параметр	Относительная погрешность факторов, %	Требуется определить
1	2	3	4	5
1	Расход Q	$Q=\mu\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2P}{\rho}}$;	$\varepsilon_d=1$; $\varepsilon_P=4$; $\varepsilon_\rho=2$	ε_Q
2	Напор в сети H	$H=aQ^2$;	$\varepsilon_a=1{,}5$; $\varepsilon_Q=3$	ε_H
3	Расход Q	$Q=\mu\omega\sqrt{2gH}$;	$\varepsilon_\mu=2$; $\varepsilon_\omega=3$; $\varepsilon_H=2{,}5$; $\varepsilon_g=0$	ε_Q
4	Расход Q	$Q=\omega C\sqrt{Ri}$;	$\varepsilon_\omega=1{,}5$; $\varepsilon_C=3$; $\varepsilon_R=4$; $\varepsilon_i=2$	ε_Q
5	Коэффициент расхода μ	$\mu=\frac{Q}{\omega\sqrt{2gH}}$;	$\varepsilon_Q=3$; $\varepsilon_\omega=1{,}5$; $\varepsilon_H=4$; $\varepsilon_g=0$	ε_μ
6	Напор в резервуар над центром отверстия H_0	$H_0=\frac{Q^2}{\mu^2\omega^2 2g}$;	$\varepsilon_Q=1{,}5$; $\varepsilon_\mu=2$; $\varepsilon_\omega=2{,}5$; $\varepsilon_g=0$	ε_{H_0}

1	2	3	4	5
7	Давление в трубопроводе p	$p=\dfrac{8\rho\lambda l}{\pi^2 d_T^5}Q^2;$	$\varepsilon_\rho=1,5;$ $\varepsilon_\lambda=2;$ $\varepsilon_l=2;$ $\varepsilon_d=3;$ $\varepsilon_Q=2,5$	ε_p
8	Потери напора по длине ΔH	$\Delta H=\lambda\dfrac{l}{d}\dfrac{v^2}{2g};$	$\varepsilon_\lambda=2;$ $\varepsilon_l=1,5;$ $\varepsilon_v=3;$ $\varepsilon_d=1;$ $\varepsilon_g=0$	$\varepsilon_{\Delta H}$
9	Число Рейнольдса Re	$Re=\dfrac{4Q}{\pi\nu d};$	$\varepsilon_Q=3;$ $\varepsilon_\lambda=2;$ $\varepsilon_d=1,5;$ $\varepsilon_\pi=0$	ε_{Re}
10	Потери напора в местных сопротивлениях $\Delta H_м$	$\Delta H_м=\xi\dfrac{v^2}{2g};$	$\varepsilon_\xi=3;$ $\varepsilon_v=1,5;$ $\varepsilon_g=1,0$	$\varepsilon_{\Delta H_м}$
11	Средняя по сечению скорость V	$V=\dfrac{\gamma i}{8\mu}r_0^2;$	$\varepsilon_\gamma=2,8;$ $\varepsilon_i=3;$ $\varepsilon_\mu=1,8;$ $\varepsilon_{r_0}=2,5$	ε_V
12	Потери напора по длине ΔH	$\Delta H=\dfrac{32\nu l v}{g d^2};$	$\varepsilon_\nu=1,5;$ $\varepsilon_l=2;$ $\varepsilon_v=2,5;$ $\varepsilon_d=3$ g - точная величина	$\varepsilon_{\Delta H}$
13	Продолжительность опорожнения вертикального цилиндрического бака t	$t=\dfrac{2D^2\sqrt{H}}{\mu d_0^2\sqrt{2g}};$	$\varepsilon_D=2;$ $\varepsilon_H=2,5;$ $\varepsilon_\mu=1,5;$ $\varepsilon_{d_0}=1,8;$ g - точная величина	ε_t
14	Давление перед насадком $p_н$	$p_н=\dfrac{8\rho}{\mu^2 d_н^4\pi^2}Q^2;$	$\varepsilon_\rho=1,8;$ $\varepsilon_Q=2,5;$ $\varepsilon_\mu=1,5;$ $\varepsilon_d=2,0;$ $\pi=3,14$	$\varepsilon_{p_н}$
15	Сила сопротивления трения тонкой прямоугольной пластины, обтекаемой потоком жидкости $F_{тр}$	$F_{тр}=\dfrac{C_f\omega\rho g v^2}{2};$	$\varepsilon_{C_f}=2;$ $\varepsilon_\omega=2,6;$ $\varepsilon_\rho=1,8;$ $\varepsilon_v=2,5;$ g - точная величина	$\varepsilon_{F_{тр}}$
16	Опытный коэффициент гидравлического трения λ	$\lambda=\dfrac{2gd\Delta H}{l v^2};$	$\varepsilon_d=2,5;$ $\varepsilon_{\Delta H}=1,8;$ $\varepsilon_l=1,5;$ $\varepsilon_v=2,2;$ g - точная величина	ε_λ

1	2	3	4	5
17	Расход жидкости через водослив с прямоугольным порогом Q	$Q=m_0 b H\sqrt{2gH}$;	$\varepsilon_{m_0}=2{,}5$; $\varepsilon_b=1{,}5$; $\varepsilon_H=2{,}0$	ε_Q
18	Активный диаметр гидромуфты D	$D=\sqrt[5]{\dfrac{M}{\lambda_M \rho n^2}}$;	$\varepsilon_{\lambda_M}=1{,}8$; $\varepsilon_M=2$; $\varepsilon_\rho=1{,}5$; $\varepsilon_n=1{,}5$	ε_D
19	Коэффициент момента гидромуфты λ_M	$\lambda_M=\dfrac{M}{\rho n^2 D^5}$;	$\varepsilon_M=3{,}0$; $\varepsilon_\rho=2{,}0$; $\varepsilon_n=2{,}5$; $\varepsilon_D=1{,}5$	ε_{λ_M}
20	Коэффициент мощности гидромуфты λ_N	$\lambda_N=\dfrac{N}{\rho n^3 D^5}$;	$\varepsilon_N=2{,}8$; $\varepsilon_\rho=2{,}2$; $\varepsilon_n=2{,}0$; $\varepsilon_D=1{,}5$	ε_{λ_N}
21	Потери напора по длине ΔH_ℓ	$\Delta H_\ell=\dfrac{\ell v^2}{RC^2}$;	$\varepsilon_\ell=1{,}8$; $\varepsilon_v=2{,}5$; $\varepsilon_R=3{,}1$; $\varepsilon_C=2{,}0$	$\varepsilon_{\Delta H_\ell}$
22	Диаметр трубопровода круглого сечения d	$d=\dfrac{\rho\lambda\ell v^2}{2p}$;	$\varepsilon_\rho=1{,}5$; $\varepsilon_\lambda=2{,}0$; $\varepsilon_v=2{,}5$; $\varepsilon_\ell=1{,}8$; $\varepsilon_p=2{,}2$	ε_d
23	Площадь эквивалентного сечения шахты A	$A=\dfrac{Q}{\psi\sqrt{2gH}}$	$\varepsilon_Q=3{,}5$; $\varepsilon_\psi=1{,}5$; $\varepsilon_g=1{,}0$; $\varepsilon_H=2{,}5$;	ε_A
24	Критерий подобия Фруда Fr	$Fr=\dfrac{v^2}{g\ell}$;	$\varepsilon_v=3{,}5$; $\varepsilon_g=2{,}0$; $\varepsilon_\ell=2{,}8$	ε_{Fr}
25	Критерий подобия /число Ейлера/ E_u	$E_u=\dfrac{\Delta p}{v^2\rho}$;	$\varepsilon_{\Delta p}=3{,}5$; $\varepsilon_v=2{,}8$; $\varepsilon_\rho=2{,}2$	ε_{E_u}
26	Напор в сети H	$H=\dfrac{\ell v^2}{RC^2}$,	$\varepsilon_\ell=1{,}0$; $\varepsilon_v=2{,}5$; $\varepsilon_R=1{,}5$; $\varepsilon_C=2{,}0$	ε_H
27	Коэффициент Дарси λ	$\lambda=0{,}11\left(\dfrac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25}$;	$\varepsilon_\Delta=2{,}5$; $\varepsilon_d=3{,}0$	ε_λ
28.	Расход жидкости в трубопроводе Q	$Q=\sqrt{\dfrac{\pi^2 d_T^5 p}{8\rho\lambda\ell}}$;	$\varepsilon_d=1$; $\varepsilon_p=2{,}0$; $\varepsilon_\rho=1{,}5$; $\varepsilon_\lambda=2{,}0$; $\varepsilon_\ell=3{,}0$	ε_Q
29	Давление перед насадком p	$p=\dfrac{\rho}{2\mu^2 S^2}Q^2$;	$\varepsilon_\rho=1{,}8$; $\varepsilon_Q=2{,}0$; $\varepsilon_\mu=1{,}5$; $\varepsilon_S=2{,}5$	ε_p

1	2	3	4	5
30	Гидравлическое сопротивление трубопровода a_T	$a_T = \dfrac{8\lambda l}{g\pi^2 d_T^5}$;	$\varepsilon_\lambda = 1,5$; $\varepsilon_l = 2,8$; $\varepsilon_{d_T} = 2,0$; g и π – точные величины	ε_{a_T}

Задача 4. В одинаковых условиях проведены испытания двух центробежных вентиляторов. Получены равновероятные данные /табл.3.12/ о его давлении при одинаковой подаче /до и после реконструкции. Провести сравнение результатов испытаний и дать заключение об их различии.

Таблица 3.12

Номер варианта	Давление, кПа					
	Номер опыта					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
1	2,2* 2,5	1,7 2,1	1,9 2,4	2,1 1,9	2,3 2,2	2,0 2,5
2	3,3 3,75	2,55 3,2	2,85 3,6	3,15 2,85	3,5 3,3	3,0 3,8
3	2,85 3,25	2,21 2,7	2,47 3,1	2,73 2,4	2,9 2,9	2,6 3,3
4	2,7 3,0	2,1 2,5	2,3 2,9	2,5 2,3	2,8 2,7	2,4 3,0
5	2,8 3,1	2,2 2,6	2,4 3,0	2,6 2,4	2,9 2,7	2,5 3,2
6	1,6 1,9	1,3 1,6	1,4 1,8	1,5 1,5	1,7 1,8	1,5 1,7
7	1,3 1,5	1,1 1,3	1,2 1,5	1,3 1,2	1,4 1,4	1,2 1,6
8	3,0 3,5	2,5 3,0	2,8 3,5	2,9 2,75	3,2 3,3	2,7 3,7
9	2,8 3,2	2,2 2,6	2,3 3,0	2,6 2,4	2,9 2,8	2,5 3,1

1	2	3	4	5	6	7
10	2,9 / 3,3	2,3 / 2,8	2,5 / 3,2	2,8 / 2,5	3,1 / 2,9	2,7 / 3,3
11	3,2 / 3,7	2,5 / 3,1	2,8 / 3,5	3,1 / 2,8	3,4 / 3,4	2,9 / 3,7
12	3,8 / 4,3	2,9 / 3,6	3,3 / 4,1	2,6 / 3,3	4,0 / 3,8	3,5 / 4,2
13	1,4 / 1,6	1,3 / 1,7	1,5 / 1,9	1,6 / 1,6	1,7 / 1,8	1,5 / 2,0
14	1,9 / 2,1	1,8 / 2,2	2,0 / 2,4	3,1 / 3,2	3,3 / 3,4	2,1 / 2,7
15	6,5 / 7,7	6,9 / 8,1	5,7 / 6,7	5,9 / 6,9	6,1 / 7,2	6,0 / 7,1
16	5,0 / 5,9	5,3 / 6,2	4,4 / 5,2	4,5 / 5,3	4,7 / 5,5	4,8 / 5,6
17.	6,3 / 7,4	6,7 / 7,8	5,5 / 6,6	5,7 / 6,7	5,9 / 6,9	6,1 / 7,1

* Примечание. В числителе приведены данные до реконструкции, в знаменателе – после реконструкции

4

Задача 5. В одинаковых условиях проведены испытания двух объектов. Получены равновероятностные данные об их производительности /табл.3.13/. Сравнить результаты испытаний и дать заключение ~~о их~~ статистическом различии. двух выборочных средних

Таблица 3.13

Вариант	Производительность, т/ч					
	Номер опыта					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
1. Объект 1 / Объект 2 1	57* / 70	53 / 83	65 / 63	61 / 74	51 / 78	63 / 75
2 2	79 / 85	98 / 95	95 / 99	74 / 101	78 / 103	82 / 107

1	2	3	4	5	6	7
3	49/50	66/57	55/63	48/59	47/61	45/60
4	60/87	65/90	68/105	74/99	69/93	81/107
5	59/50	37/54	49/57	41/52	38/48	56/59
6	15/22	18/28	17/21	19/19	16/23	11/27
7	102/115	98/128	107/119	96/123	97/99	109/108
8	48/65	60/78	52/58	56/69	41/73	58/75
9	47/55	43/68	55/48	41/59	51/63	53/49
10	89/103	83/96	101/117	95/110	79/92	98/114
11	111/125	107/139	116/130	107/138	105/111	122/121
12	94/106	91/118	99/111	91/117	89/94	104/103
13	80/91	77/100	84/94	77/99	76/78	102/86
14	68/77	65/85	71/81	66/84	65/66	87/73
15	56/65	55/72	60/69	56/72	59/56	74/62
16	48/55	47/61	52/59	48/61	46/48	43/53
17	41/47	40/51	44/50	41/52	37/42	39/46
18	52/59	50/64	56/63	52/67	43/53	49/58
19	71/80	69/87	76/85	70/91	58/72	66/79
20	96/110	93/118	102/115	96/123	78/98	89/107

1	2	3	4	5	6	7
21	$\frac{145}{166}$	$\frac{141}{178}$	$\frac{154}{173}$	$\frac{145}{186}$	$\frac{118}{147}$	$\frac{134}{161}$
22	$\frac{70}{103}$	$\frac{88}{108}$	$\frac{84}{122}$	$\frac{100}{124}$	$\frac{99}{119}$	$\frac{107}{117}$
23	$\frac{66}{79}$	$\frac{62}{92}$	$\frac{74}{63}$	$\frac{70}{72}$	$\frac{61}{83}$	$\frac{-}{87}$
24	$\frac{55}{63}$	$\frac{51}{76}$	$\frac{63}{57}$	$\frac{59}{56}$	$\frac{49}{67}$	$\frac{47}{71}$
25	$\frac{95}{124}$	$\frac{107}{137}$	$\frac{119}{108}$	$\frac{125}{116}$	$\frac{107}{128}$	$\frac{101}{132}$
26	$\frac{73}{89}$	$\frac{89}{80}$	$\frac{67}{84}$	$\frac{79}{87}$	$\frac{71}{82}$	$\frac{68}{78}$

* Примечание. В числителе приведены данные для объекта № 1, а в знаменателе – для объекта № 2.

Задача 6. В результате испытаний центробежного насоса установлено /с равной вероятностью/, что создаваемый им напор при соответствующих подачах определяется значениями, приведенными в табл.3.14. Известно также, что напор насоса при его испытаниях измерялся прибором, класс точности и предел измерения которого указаны в таблице.

Установить аналитическую зависимость напора H от подачи Q.

Таблица 3.14

Вариант	Напор насоса H, м вод.ст., при подаче Q, м³/ч					Класс точности и предел измерения прибора, м вод.ст.
	10	20	30	40	50	
1	2	3	4	5	6	7
1	89	86	72	67	50	3,0 100,0
2	97	95	81	76	59	2,0 150,0
3	108	106	93	86	71	2,0 160,0
4	79	75	61	57	41	2,5 100,0

1	2	3	4	5	6	7
5	117	114	103	95	82	3,0 – 100,0
6	125	122	110	102	89	2,5 140,0
7	111	107	90	83	63	3,0 125,0
8	135	132	116	108	88	2,0 150,0
9	146	143	128	119	102	2,5 150,0
10	110	105	86	80	57	2,5 125,0
11	140	133	113	107	82	2,0 160,0
12	152	149	130	121	100	1,5 200,0
13	187	182	165	152	131	2,0 200,0
14	200	195	176	163	142	2,5 200,0
15	160	155	129	121	90	2,0 250,0
16	174	171	146	137	106	2,0 200,0
17	194	191	167	155	128	1,5 300,0
18	234	228	206	190	164	2,5 250,0
19	250	244	220	206	179	2,0 280,0
20	220	210	173	161	115	2,5 250,0

<u>Задача 7.</u> При испытаниях добычной машины получены выборки зависимости равновероятных производительностей машины от скорости подачи. На каждом уровне скорости подачи производили ряд измерений производительности. Установить по данным табл.3.15 аналитическую зависимость производительности Π от скорости подачи V добычной машины.

Задача 3.15

Вариант	Скорость подачи машины V, м,мин	Производительность Π добычной машины при параллельных опытах, т/ч			
1	2	3	4	5	6
1	1,0	87	85	93	89
	2,0	94	92	89	95
	3,0	99	93	95	91
	4,0	104	101	99	102
	5,0	109	103	105	107
2	1,0	92	90	88	94
	2,0	104	102	97	106
	3,0	114	110	108	107
	4,0	116	118	111	113
	5,0	119	122	117	124
3	1,0	118	116	120	119
	2,0	135	128	130	131
	3,0	143	140	146	148
	4,0	147	149	153	151
	5,0	158	152	155	154
4	1,5	164	161	158	157
	2,5	160	157	159	155
	3,5	152	149	147	148
	4,5	143	140	135	138
	5,5	127	130	125	123
5	2,0	110	108	106	113
	3,0	125	122	116	127
	4,0	137	132	130	128
	5,0	139	142	133	136
	6,0	143	147	141	148
6	1,5	46	45	44	47
	2,5	53	51	49	53
	3,5	58	55	54	57
	4,5	60	59	56	57
	5,5	59	61	60	62
7	2,0	74	72	70	75
	4,0	83	81	78	85
	6,0	91	88	87	91
	8,0	93	95	89	90
	10,0	95	98	94	99

1	2	3	4	5	6
8	1,0	156	153	149	160
	2,0	177	173	165	180
	3,0	194	187	184	182
	4,0	197	200	189	192
	5,0	202	207	199	211
9	1,5	48	50	52	49
	3,0	65	63	61	59
	4,5	73	75	70	69
	6,0	82	80	78	81
	7,5	87	83	84	82
10	1,0	115	112	110	118
	2,0	130	127	121	132
	3,0	142	138	135	134
	4,0	145	147	139	141
	5,0	149	153	146	155

Задача 8. В результате испытаний радиального лопастного насоса с равной вероятностью установлено, что мощность его при соответствующих подачах определяется значениями, приведенными в табл.3.16. Мощность измерялась приборами, класс точности и предел измерения которых указаны в таблице.

Установить аналитическую зависимость мощности N насоса от подачи Q.

Таблица 3.16

Вариант	Мощность насоса N, кВт, при его подаче Q, м³/ч						Класс точности; предел измерения прибора, кВт
	0	10	20	30	40	50	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	12,3	13,6	14,2	15,1	15,3	16,1	2,0; 20
2	12,7	13,1	13,8	14,9	15,2	16,5	1,5; 30
3	4,9	5,4	5,7	6,1	6,2	6,5	3,0; 10
4	5,5	6,3	6,8	6,75	7,3	8,1	1,5; 20
5	8,2	9,3	10,3	10,6	11,8	12,1	1,5; 20
6	8,9	9,1	9,7	10,2	10,3	10,7	2,0; 15
7	16,7	17,1	18,3	19,0	19,5	20,2	1,5; 25
8	16,9	17,0	17,4	18,2	18,3	18,7	2,0; 20
9	16,0	16,8	17,3	17,4	18,0	18,4	1,5; 20

Окончание табл.3.16

1	2	3	4	5	6	7	8
10	14,4	14,5	15,4	15,6	15,9	16,8	2,0; 20
11	14,7	15,1	16,3	16,7	17,8	18,1	1,5; 25
12	6,3	7,5	7,8	8,7	9,8	10,2	1,5; 20
13	6,9	7,0	7,3	8,3	8,4	9,1	2,5; 15
14	6,1	6,8	7,05	7,5	8,3	8,4	3,0; 10
15	9,1	9,8	10,1	10,5	11,3	11,4	2,5; 15
16	9,9	10,0	10,3	11,3	11,4	12,1	2,0; 20
17	9,3	10,5	10,8	11,5	12,3	13,4	2,5; 15
18	10,1	10,8	11,1	11,5	12,3	12,4	2,0; 15
19	11,9	12,0	12,3	13,3	13,4	14,1	1,5; 25
20	13,3	14,5	14,8	15,5	16,3	17,4	2,0; 20

4. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В основу планирования положен многофакторный эксперимент, в котором при переходе от опыта к опыту одновременно изменяются все входные величины. В традиционном однофакторном эксперименте совокупность опытов делится на серии. В данной серии изменяется одна входная величина, а остальные поддерживаются постоянными. Такая методика приемлема для относительно простых объектов. Когда же параметр зависит от четырех-шести и более факторов, использование однофакторных экспериментов затруднено. Планирование эксперимента позволяет уменьшить число опытов и повысить точность коэффициентов уравнения регрессии, получаемого при обработке результатов [1; 5; 7; 8].

4.1. Классификация планов

Рассмотрим классификацию только по тем признакам, которые будут использоваться при дальнейшем изложении.

Различают планы отсеивающего и основного эксперимента. Цель первого состоит в выявлении значимых факторов. Цель основного – в установлении искомых зависимостей для объекта исследования.

Все планы можно разделить на планы оптимизации и аппроксимации. При оптимизации /экстремальный эксперимент/ ищутся наилучшие условия функционирования объекта. При аппроксимации устанавливается аналитическая зависимость между параметрами и факторами.

В зависимости от того, коэффициенты какого полинома находятся при эксперименте, различают планы первого и высших порядков. Хорошо разработаны планы первого и второго порядков. В первом случае ищутся коэффициенты линейного уравнения

$$y = \sum_{i=0}^{k} b_i x_i = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i$$

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i , \qquad /4.1/$$

где y - параметр; b_0 - свободный член; k - число факторов; i - порядковый номер; b_i - коэффициент при соответствующем факторе; x_i - фактор.

В планах второго порядка определяются коэффициенты полинома второй степени вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{c} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 , \qquad /4.2/$$

где C - число сочетаний из k факторов по два; j - порядковый номер, отличный от i.

Различают полные факторные эксперименты /ПФЭ/ и дробные факторные эксперименты /ДФЭ/. Поясним суть понятий на примере планов первого порядка. Для построения линейной модели в опытах достаточно фиксировать факторы на двух уровнях - на верхнем и нижнем. Если при этом планируется перебор всех возможных сочетаний факторов, то мы будем иметь дело с ПФЭ. Если используется часть ПФЭ, то эксперимент называется ДФЭ.

Эксперимент может быть физическим и математическим. В последнем случае также с успехом можно использовать теорию планирования. Применение ЭВМ расширило возможности вычислительного эксперимента. Расчеты можно выполнять для случаев, когда процессы в объекте описываются весьма громоздкими и сложными системами уравнений. Однако из полученных результатов часто бывает трудно сделать выводы об оптимальном функционировании объекта или виде зависимостей между параметрами и факторами. Теория планирования эксперимента позволяет снять эти затруднения.

4.2. Уровни, интервалы варьирования и область определения факторов. Матрица планирования эксперимента

Составлению плана эксперимента предшествует тщательный анализ объекта исследования с целью установления его параметров и факторов. В творческом отношении это наиболее важный этап. При выполнении анализа руководствуются соображениями, изложенными в подразд.4.2. Ранее отмечалось, что в большинстве случаев априорной информации об объекте оказывается достаточно для установления параметра.

С выбором факторов дело обстоит значительно сложнее. Число факторов, характеризующих реальные объекты, как правило, достаточно большое и их учет резко осложняет решение задачи. В реальных условиях факторы оказывают далеко не одинаковое влияние на параметр: влияние одних значимо, влиянием других можно пренебречь. Для разделения факторов на значимые и незначимые в качестве путеводных используются идеи дисперсионного анализа. Существенно влияние фактора, если вклад его в интересующей области в дисперсию параметра значим на фоне дисперсии, обусловленной погрешностями опытов. После выделения значимых факторов определяют их уровни. Это задача технолога.

Уровнем фактора называется его значение, фиксируемое в эксперименте. В планах первого порядка используются нижний и верхний уровни. В расчетах необходим также нулевой.

Обычно до основного эксперимента по тем или иным соображениям можно выделить диапазон, в котором исследователя интересует зависимость параметра от данного фактора. В этом случае наибольшее значение фактора в диапазоне принимается за верхний уровень, а наименьшее за нижний.

Интервалом варьирования называется значение фактора в натуральных единицах, прибавление которого к нулевому дает верхний, а вычетание - нижний уровень. Обозначим данный фактор X_i, его нижний уровень - $X_{iн}$, верхний - $X_{iв}$ и нулевой - X_{i0}. Тогда интервал варьирования

$$\Delta X_i = X_{i0} - X_{iн} = X_{iв} - X_{i0}.$$

В теории планирования эксперимента широко используются кодированные значения фактора

$$x_i = (X_i - X_{i0}) / \Delta X_i,$$

где X_i - натуральное значение фактора на соответствующем уровне; X_{i0} - натуральное значение фактора на нулевом уровне; ΔX_i - интервал варьирования соответствующего фактора.

В соответствии с изложенным кодированное значение любого фактора на нижнем уровне

$$x_{iн} = (X_{iн} - X_{i0}) / \Delta X_i = -1,$$

а на верхнем уровне

$$x_{iв} = (X_{iв} - X_{i0}) / \Delta X_i = +1.$$

Область определения факторов в эксперимента можно изобразить графически. Для двух факторов до кодирования она изображается прямоугольником, размеры которого зависят от масштабов и значений физических величин /рис.4.1/.

13 - 0402Ір

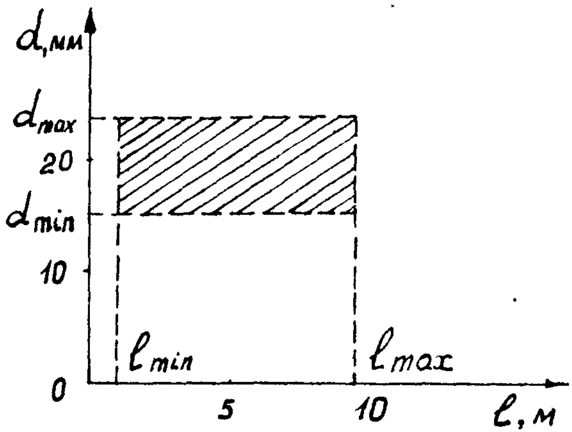


Рис.4.1. Область определения факторов

После кодирования получаем квадрат /рис.4.2/. Для трех факторов, устанавливаемых на двух уровнях, такая область имеет вид куба. В общем случае для k факторов будем иметь дело с k -мерным кубом в k -мерном пространстве.

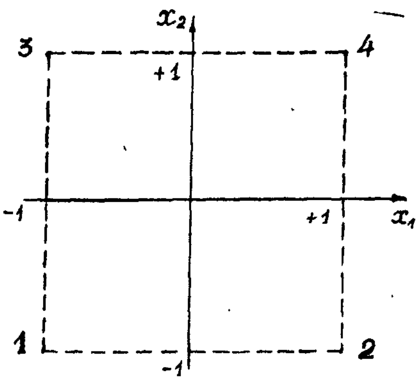


Рис.4.2. Область определения кодированных факторов

Пример. Составить план эксперимента по установлению зависимости производительности гидроотбойки при нарезных работах от определяющих факторов в условиях данного пласта при постоянном подводимом к участку давлении воды. Из условий примера следует, что параметром в данном случае является производительность гидроотбойки. Она зависит от характеристик пласта /мощность, угол падения, крепость, вязкость, трещиноватость угля и др./, ширины заходки и свойств струи в контакте с массивом. Для данного пласта мощность, угол падения и т.д. являются заданными величинами и поэтому в условиях примера не могут быть факторами. При нарезных работах ширина заходки - также заданная величина.

Свойства струи в контакте с массивом зависят от давления перед насадком, его диаметра и расстояния до груди забоя. Если задано давление подводимой к участку воды, то давление перед насадком функционально связано с диаметром последнего. Поэтому одновременно диаметр насадка и давление перед ним в рассматриваемом случае не могут быть факторами.

На основании изложенного можно сделать вывод, что факторами в условиях рассматриваемого примера являются диаметр насадка и расстояние до груди забоя.

Примем в качестве первого фактора диаметр насадка. Обозначим его X_1. Вторым фактором X_2 будет расстояние до груди забоя. Предварительными экспериментами установлена целесообразность проведения исследований при диаметрах насадка X_1 = 16...22 мм и расстояниях X_2 = 1...
...9 м. С учетом этого принимаем следующие уровни факторов: $X_{1н}$ = 16 мм; $X_{1в}$ = 22 мм; $X_{2н}$ = 1 м; $X_{2в}$ = 9 м. Тогда нулевые уровни X_{10} = 19 мм; X_{20} = 5 м, а интервалы варьирования ΔX_1 = 3 мм; ΔX_2 = 4 м.

Кодированное значение нижних и верхних уровней факторов будут соответственно -1 и +1. Все возможные комбинации при варьировании факторов на двух уровнях в рассматриваемом примере определяются четырьмя опытами. План эксперимента изобразим в виде матрицы планирования для двух факторов на двух уровнях приведенной в табл.4.1. В матрице x_0 - фиктивный фактор. Он введен для удобства определения свободного члена полинома.

По данным приведенного эксперимента можно определить коэффициенты линейного уравнения регрессии:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 ,$$

где $\hat{y}$ - расчетное значение параметра.

Таблица 4.1

Номер опыта	Факторы			Параметр y, т/ч
	x_0	x_1	x_2	
1	+1	-1	-1	y_1
2	+1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4

4.3. Матрица планирования ПФЭ 2^k. Ее свойства

Если факторов два, то перебор всех возможных сочетаний на двух уровнях не представляет труда. Увеличение числа факторов значительно усложняет задачу. Существует несколько приемов построения матрицы. Рассмотрим один из наиболее распространенных – прием чередования знаков. значимого

Он состоит в том, что элементарное сочетание первого фактора /-1; +1/ повторяется для каждого следующего на нижнем и верхнем уровнях. При этом в первом столбце, соответствующем x_0, знаки не изменяются; во втором – изменяются через один; в третьем – через два, в четвертом – через четыре и т.д. Построенные таким образом матрицы для двух, трех и четырех факторов /ПФЭ 2^2, 2^3, 2^4/ приведены в табл.4.2.

Таблица 4.2

	Номер опыта	Факторы				
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	1	+1	-1	-1	-1	-1
	2	+1	+1	-1	-1	-1
	3	+1	-1	+1	-1	-1
ПФЭ2^2	4	+1	+1	+1	-1	-1
	5	+1	-1	-1	+1	-1
	6	+1	+1	-1	+1	-1
	7	+1	-1	+1	+1	-1
ПФЭ2^3	8	+1	+1	+1	+1	-1
	9	+1	-1	-1	-1	+1
	10	+1	+1	-1	-1	+1
	11	+1	-1	+1	-1	+1
	12	+1	+1	+1	-1	+1
	13	+1	-1	-1	+1	+1
	14	+1	+1	-1	+1	+1
	15	+1	-1	+1	+1	+1
ПФЭ2^4	16	+1	+1	+1	+1	+1

Эти матрицы обладают свойством симметричности. Каждый фактор во всех опытах /в столбце/ на верхнем уровне встречается столько раз, сколько и на нижнем: [illegible] выполнение внутрени [illegible], обозн. [illegible] му свойству

$$\sum_{u=1}^{n} x_{iu} = 0, \qquad /4.3/$$

где u – номер опыта.

Второе свойство приведенных матриц – свойство нормировки. Факторы в матрице встречаются только на уровнях +I и –I. Математически это свойство выражается зависимостью

$$\sum_{u=1}^{n} x_{iu}^2 = n. \qquad /4.4/$$

Третье свойство – свойство ортогональности. Суммы почленных произведений двух любых столбцов матрицы равны нулю:

$$\sum_{u=1}^{n} x_{iu}\, x_{ju} = 0. \qquad /4.5/$$

Четвертое свойство – свойство ротабельности. Суть его состоит в том, что точки в матрице выбираются так, что точность предсказания параметра одинакова во всех направлениях.

Первые три свойства очевидны, они следуют из матриц. Доказательство четвертого приводится в специальной литературе.

4.4. Определение коэффициентов уравнения регрессии

При рассмотрении основ регрессионного анализа /см. подразд.3.3.2/ отмечалось, что если вид уравнения задан, то наиболее достоверные результаты будут получены при определении коэффициентов с использованием метода наименьших квадратов. В этом случае коэффициенты уравнения регрессии ищутся такими, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от значений, вычисленных по формуле, была минимальной.

Рассмотрим методику определения коэффициентов для простейшей зависимости

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \qquad /4.6/$$

Так как во всех опытах $x_0 = 1$, то уравнение /4.6/ можно представить в виде

$$\hat{y} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Для определения коэффициентов необходимо, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной:

$$\sum_{u=1}^{n} \left[y_u - \left(b_0 x_0 + b_1 x_{1u} + b_2 x_{2u} \right) \right]^2 = min.$$

В соответствии с изложенным в подразд.3.3.2 последнее условие будет выполняться при:

$$\sum_{u=1}^{n}\left[y_u-\left(b_0x_0+b_1x_{1u}+b_2x_{2u}\right)\right]x_0=0;$$

$$\sum_{u=1}^{n}\left[y_u-\left(b_0x_0+b_1x_{1u}+b_2x_{2u}\right)\right]x_{1u}=0;$$

$$\sum_{u=1}^{n}\left[y_u-\left(b_0x_0+b_1x_{1u}+b_2x_{2u}\right)\right]x_{2u}=0.$$

После преобразований получим

$$\sum_{u=1}^{n}y_u x_0-b_0\sum_{u=1}^{n}x_0^2-b_1\sum_{u=1}^{n}x_{1u}x_0-b_2\sum_{u=1}^{n}x_{2u}x_0=0;$$

$$\sum_{u=1}^{n}y_u x_{1u}-b_0\sum_{u=1}^{n}x_{1u}x_0-b_1\sum_{u=1}^{n}x_{1u}^2-b_2\sum_{u=1}^{n}x_{1u}x_{2u}=0;$$

$$\sum_{u=1}^{n}y_u x_{2u}-b_0\sum_{u=1}^{n}x_{2u}x_0-b_1\sum_{u=1}^{n}x_{2u}x_{1u}-b_2\sum_{u=1}^{n}x_{2u}^2=0.$$

Так как вследствие нормировки

$$\sum_{u=1}^{n}x_{iu}^2=n,$$

а вследствие ортогональности

$$\sum_{u=1}^{n}x_{iu}x_{ju}=0,$$

то

$$\sum_{u=1}^{n}y_u x_0-b_0 n=0; \qquad /4.7/$$

$$\sum_{u=1}^{n}y_u x_{1u}-b_1 n=0; \qquad /4.8/$$

$$\sum_{u=1}^{n}y_u x_{2u}-b_2 n=0. \qquad /4.9/$$

Нетрудно понять, что переход к зависимости

$$\hat{y}=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$$

добавит к /4.7/ - /4.9/ еще одно уравнение

$$\sum_{u=1}^{n}y_u x_{3u}-b_3 n=0.$$

Таким образом, в общем случае коэффициент регрессии определяется из уравнения

$$\sum_{u=1}^{n} y_u x_{iu} - b_i n = 0.$$

Отсюда следует, что при любом числе факторов

$$b_i = \sum_{u=1}^{n} y_u x_{iu} / n. \qquad /4.10/$$

В уравнении регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 ,$$

например, все коэффициенты имеют размерность параметра y, так как x_1, x_2 - безразмерные величины. Кроме этого, факторы x_1, x_2 имеют одинаковый порядок /изменяются от -1 до +1/. Поэтому коэффициенты b_1, b_2 отражают силу влияния соответствующего фактора. Значение коэффициента соответствует вкладу данного фактора в параметр при переходе с нулевого на верхний или нижний уровень.

По уравнению можно вычислить значения параметра при любом дробном значении факторов. Уравнение можно привести к виду, в котором факторы будут иметь свое первоначальное физическое значение. Для этого необходимо в него подставить

$$x_i = (X_i - X_{i0}) / \Delta X_i .$$

4.5. Оценка воспроизводимости опытов

Предположим, что при построении модели учтены все факторы, влияющие на параметр, а также, что между Y и X существует функциональная связь и что никакие случайные величины не влияют на объект. В этом случае каждый раз при постановке опыта с данным набором значений факторов будем получать одно и то же значение параметра. Воспроизводимость опытов будет полная. В реальных условиях учесть влияние абсолютно всех факторов нельзя, да и нет необходимости. Поэтому повторные /параллельные/ опыты не дают абсолютно одинаковых результатов, т.е. существует погрешность опыта.

Погрешности оцениваются дисперсией. В рассматриваемом случае дисперсия называется дисперсией воспроизводимости опытов. Для ее получения каждую строку матрицы планирования повторяют несколько раз. С целью исключения систематических погрешностей опыты выполняют в случайной последовательности, что называется рандомизацией. Практически поступают следующим образом. Предположим, что факторов два. ПФЭ требует постановки четырех опытов. Для оценки воспроизводимости решили каждую строку повторять дважды, т.е. поставить восемь опытов. Нумеруем эти опыты, а затем, пользуясь таблицей случайных чисел, устанавливаем порядок их проведения.

После выполнения опытов определяем построчные дисперсии

$$S_u^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} \left(y_{uj} - \bar{y}_u \right)^2, \qquad /4.11/$$

где m - число параллельных опытов; y_{uj} - значения параметра в опыте j данной u строки; $\frac{\sum y_{uj}}{m} = \bar{y}_u$ - математическое ожидание параметра в строке.

Однородность дисперсий S_u^2 проверяется с помощью критерия Кохрена или Фишера. Если дисперсии окажутся однородными, а только в этом случае по экспериментальным данным можно определять коэффициенты уравнения регрессии, они усредняются по выражению /3.16/. Постановка параллельных опытов обусловливает большие материальные и временные затраты. Если есть основания ожидать умеренный разброс параметра, то повторные опыты проводятся не для всех строк матрицы, а только в одной точке факторного пространства /обычно в центре плана $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$/.

В последнем случае дисперсия воспроизводимости определяется по уравнению

$$S_в^2 = S_0^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{j=1}^{n} \left(y_{0j} - \bar{y}_{0j} \right)^2. \qquad /4.12/$$

где S_0^2 - дисперсия в центре плана; n_0 - число параллельных опытов в нулевой точке; y_{0j} - значение параметра в параллельных опытах в нулевой точке; $\bar{y}_{0j}$ - математическое ожидание параметра в нулевой точке.

4.6. Проверка значимости коэффициента уравнения регрессии

Случайная величина является значимой, если с принятой вероятностью выходит за пределы соответствующего доверительного интервала.

Коэффициенты регрессии определяют по выражению /4.10/. С учетом параллельных опытов

$$b_i = \sum_{u=1}^{n} \bar{y}_u x_{iu} / n. \qquad /4.13/$$

В последнем выражении n - точная величина, а x_{iu} - считается точной, так как предполагается, что погрешность определения фактора на порядок меньше погрешности определения параметра. Таким образом,

$$b_i = f\left(\sum_{u=1}^{n} \bar{y}_u\right).$$

В соответствии с выражением /3.9/ дисперсия коэффициента b_i :

$$S_{b_i}^2 = \sum_{u=1}^{n}\left(\partial b_i / \partial \bar{y}_u\right)^2 S_{\bar{y}_u}^2 .$$

Например, при $n = 4$ /два фактора на двух уровнях/

$$b_0 = (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4)/4;$$

$$S_{b_0}^2 = \frac{1}{16} S_{\bar{y}_1}^2 + \frac{1}{16} S_{\bar{y}_2}^2 + \frac{1}{16} S_{\bar{y}_3}^2 + \frac{1}{16} S_{\bar{y}_4}^2 ;$$

так как дисперсии $S_{\bar{y}_1}^2$, $S_{\bar{y}_2}^2$ и т.д. однородны, то можно считать:

$$S_{\bar{y}_1}^2 \simeq S_{\bar{y}_2}^2 \simeq S_{\bar{y}_3}^2 \simeq S_{\bar{y}_4}^2 \simeq S_{cв}^2$$

и

$$S_{b_0}^2 = S_{cв}^2 / 4.$$

В общем случае

$$S_{b_i}^2 = S_{cв}^2 / n. \qquad /4.14/$$

Число степеней свободы $S_{b_i}^2$ равно $f = n(m-1)$.

В соответствии с выражением /3.10/ доверительный интервал для коэффициента b_i:

$$|\bar{b}_i| - t_\alpha S_{b_i} \le |b_i| \le |\bar{b}_i| + t_\alpha S_{b_i}$$

Предположим, что коэффициент b_i незначим. В этом случае $|\bar{b}_i| = 0$. Для значимости коэффициента должно выполняться условие

$$|b_i| > t_\alpha S_{b_i}. \qquad /4.15/$$

Критерий t_α принимается из таблиц для соответствующего уровня значимости α и числа степеней свободы $f = n(m-1)$.

4.7. Проверка адекватности уравнения регрессии

Подробно об этом говорилось в подразд.3.3.2.

На первом этапе ищется дисперсия адекватности

$$S^2_{ад} = \frac{1}{n-\ell} \sum_{u=1}^{n} \left(\bar{y}_u - \hat{y}_u \right)^2, \qquad /4.16/$$

где ℓ - число коэффициентов в уравнении регрессии; $\hat{y}_u$ - рассчитанное по уравнению значение параметра.

Затем с использованием F -критерия проверяется однородность дисперсий адекватности и воспроизводимости.

Пример. Установить зависимость производительности гидроотбойки от определяющих факторов.

Выбор факторов, установление их уровней и интервалов варьирования выполнены в примере разд.4.2.

Матрица планирования и результаты эксперимента приведены в табл.4.3.

Таблица 4.3

Номер опыта в матрице	Порядок реализации опыта	X_0	Диаметр насадка		Расстояние		Производительность гидромонитора, т/ч		
			код	мм	код	м	по опытам	средняя	расчетная
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	4 12 2	+I	-I	16	-I	I	9 10 14	II	13
2	3 7 8	+I	+I	22	-I	I	25 20 27	24	22
3	9 I II	+I	-I	16	+I	9	5 4 6	5	3
4	5 6 10	+I	+I	22	+I	9	13 8 9	10	12

Коэффициенты уравнения регрессии определяются так.

В соответствии с выражением /4.13/

$$b_0 = \sum_{u=1}^{n} \bar{y}_u x_0 / 4 = (11 + 24 + 5 + 10) / 4 = 12{,}5 \text{ т/ч};$$

$$b_1 = \sum_{u=1}^{n} \bar{y}_u x_{1u}/4 = (-11 + 24 - 5 + 10)/4 = 4{,}5 \text{ т/ч};$$
$$b_2 = \sum_{u=1}^{n} \bar{y}_u x_{2u}/4 = (-11 - 24 + 5 + 10)/4 = -5{,}0 \text{ т/ч}.$$

Воспроизводимость опытов оценивается в следующем порядке.

Рассчитаем построчные дисперсии:

$$S_1^2 = \frac{1}{3-1}\left[(9-11)^2 + (10-11) + (14-11)^2\right] = 7 \text{ т/ч}^2;$$
$$S_2^2 = \frac{1}{3-1}\left[(25-24)^2 + (20-24)^2 + (27-24)^2\right] = 13 \text{ т/ч}^2;$$
$$S_3^2 = \frac{1}{3-1}\left[(5-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2\right] = 1 \text{ т/ч}^2;$$
$$S_4^2 = \frac{1}{3-1}\left[(13-10)^2 + (8-10)^2 + (9-10)^2\right] = 7 \text{ т/ч}^2.$$

Проверим однородность дисперсий: сравним S_2^2 с S_3^2.

$$G_p = S_2^2/(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) = 13/28 = 0{,}464.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и степеней свободы $f = 2$ и $f = 4$ табличное значение G-критерия $G_т = 0{,}9057$.

Таким образом, дисперсии однородны. Дисперсия воспроизводимости в соответствии с выражением /3.13/

$$S_B^2 = S_{cb}^2 = (7 \cdot 2 + 13 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 2)/8 = 7(\text{т/ч})^2.$$

Значимость коэффициентов уравнения регрессии проверяют в таком порядке.

По выражению /4.14/ определяем дисперсию коэффициентов

$$S_{b_i}^2 = S_B^2/n = 7/4 = 1{,}75\ (\text{т/ч})^2.$$

В соответствии с выражением /4.15/ доверительный интервал для коэффициентов $|b_i| = t_\alpha S_{b_i}$.

Табличное значение критерия t_α для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $f = n(m-1) = 4(3-1) = 8$ составляет 2,306.

Таким образом, доверительный интервал

$$|b_i| = 2{,}306\sqrt{1{,}75} = 3{,}05 \text{ т/ч}.$$

Следовательно, все коэффициенты значимы.

Адекватность уравнения регрессии проверяется в таком порядке.

В соответствии с выражением /4.16/ определяем дисперсию адекватности

$$S_{ad}^2 = \left((11-13)^2 + (24-22)^2 + (5-3)^2\right) + (10-12)^2 \big/ (4-3) = 16\ (\text{т/ч})^2.$$

Расчетное значение F-критерия

$$F_p = S_{ad}^2 / S_в^2 = 16/7 = 2{,}286.$$

Критическое значение критерия для уровня значимости 0,05 и чисел степеней свободы $f_1 = 4 - 3 = 1$ и $f_2 = 4\,(3 - 1) = 8$ в соответствии с табл.3.4. $F_\alpha = 5{,}32$. Так как $F_p = 2{,}286 < F_\alpha = 5{,}32$, то уравнение $\hat{y} = 12{,}5 + 4{,}5\,x_1 - 5{,}0\,x_2$ адекватно эксперименту.

4.8. Дробный факторный эксперимент

Если число факторов равно четырем, пяти и более, то при проведении ПФЭ необходима постановка значительного числа опытов. Уже для ПФЭ 2^4 оно равно 16. Излишне растет и число степеней свободы для проверки адекватности. Так, при ПФЭ 2^4 определяют пять коэффициентов – b_0, b_1, b_2, b_3, b_4. Следовательно, число степеней свободы для дисперсии адекватности $f = 16 - 5 = 11$. Для ПФЭ 2^5 оно составляет $f = 32 - 6 = 26$. Таким образом, ПФЭ обладает большой избыточностью опытов.

Необходима методика уменьшения их числа. Ее суть рассмотрим на примере ПФЭ 2^2. В таком плане четыре опыта. Он позволяет определить коэффициенты уравнения

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 .$$

Коэффициент b_{12} находится по формуле

$$b_{12} = \sum_{u=1}^{n} y_u x_{1u} x_{2u} / 4. \qquad /4.17/$$

Но после определения коэффициента b_{12} не остается степеней свободы для проверки адекватности. Однако пониманию сути метода снижения числа опытов это не мешает. Член $b_{12} x_1 x_2$ учитывает взаимодействие факторов. Если модель линейна, то эффект взаимодействия будет незначим и столбец $x_1 x_2$ окажется свободным. Его можно использовать для определения коэффициента b_3. При этом получается не восемь опытов, как в ПФЭ 2^3, а только четыре. Матрица дробного факторного эксперимента приведена в табл.4.4.

Таблица 4.4

Номер опыта	Факторы								Переменная состояния y
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	
1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4

Столбцы 2 – 4 представляют здесь ПФЭ 2^2. В столбце 5 – приведен закон изменения в опытах третьего фактора $x_3 = x_1 x_2$, а в столбцах 6 – 9 – эффект взаимодействия.

Дробный факторный эксперимент позволяет сократить число опытов, однако теперь оценки коэффициентов не будут раздельными, как в ПФЭ. Из матрицы /см. табл.4.4/ видно, что знаки в столбце для коэффициента b_1 такие же, как и у столбца для эффекта $x_2 x_3$. Значит, оценка коэффициента b_1 будет смешана с оценкой коэффициента b_{23}. Соответственно оценка b_2 смешана с оценкой b_{13} и b_3 с b_{12}. Но так как для линейной модели эффекты взаимодействия являются незначимыми, то это допустимо.

Рассмотренный план является полурепликой плана ПФЭ 2^3. Он обозначается ДФЭ 2^{3-1}. Можно было бы построить план, в котором $x_3 = -x_1 x_2$. На практике используются 1/4-реплики, 1/8-реплики и т.д.

Предполагая, что число факторов, равно четырем, решаем составить полуреплику 2^{4-1}. Возьмем восемь решений

1/ $x_4 = x_1 x_2$; 2/ $x_4 = -x_1x_2$; 3/ $x_4 = x_2 x_3$; 4/ $x_4 = -x_2 x_3$;

5/ $x_4 = x_1 x_3$; 6/ $x_4 = -x_1 x_3$; 7/ $x_4 = x_1 x_2 x_3$; 8/ $x_4 = -x_1 x_2 x_3$.

При этом разрешающие способности полуреплики будут различными. Для выяснения того, с каким коэффициентом смешана оценка данного, используются понятия генерирующего соотношения и определяющего контраста. Генерирующее соотношение – произведение факторов, заменяемое в матрице новой независимой переменной. Так, для седьмого решения в приведенном выше примере $x_4 = x_1 x_2 x_3$. Умножив генерирующее соотношение на фактор, стоящий слева, в данном случае на x_4, получим определяющий контраст. Для седьмого решения $x_4^2 = x_1 x_2 x_3 x_4$. Так как $x_4^2 = 1$, то определяющий контраст имеет вид: $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$.

Умножив определяющий контраст на столбец, соответствующий фактору x_i, получим ответ: какой эффект смешали с данным.

Пример: $$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_4 .$$

Таким образом, оценка коэффициента b_1 смешана с оценкой b_{234}. Разрешающая способность реплики тем выше, чем больший порядок имеет генерирующее соотношение. Если принять $x_4 = x_1 x_2$, то определяющий контраст будет $1 = x_1 x_2 x_4$. В этом случае $x_1 = x_1^2 x_2 x_4 = x_2 x_4$. Следовательно, оценка коэффициента b_1 будет смешана с оценкой b_{24}. В общем случае это хуже, так как коэффициент b_{24} обычно больше коэффициента b_{234}. В конкретных условиях может быть и наоборот.

4.9. Планирование отсеивающих экспериментов

Для разделения факторов на значимые и незначимые часто недостаточно изучения и анализа априорной информации об объекте. Необходимы специальные исследования /отсеивающие эксперименты/.

Их проводят на начальной стадии до планирования и постановки основного эксперимента. Планирование отсеивающих экспериментов стремятся свести к минимальному числу опытов. В зависимости от соотношения между числом опытов n и определяемым числом коэффициентов ℓ планы делятся на ненасыщенные $(n - \ell > 0)$, насыщенные $(n - \ell = 0)$ и сверхнасыщенные $(n - \ell < 0)$.

Для выделения значимых факторов широко используются: метод экспертных оценок, планы Планкета - Бермана, метод случайного баланса, планы дробного факторного эксперимента [8].

Остановимся на некоторых особенностях выделения существенных факторов с использованием ДФЭ.

Для отсеивания факторов достаточным является анализ линейной модели. Число коэффициентов такой модели равно $k + 1$, где k - число факторов. Рассматриваются насыщенные и ненасыщенные планы. Для насыщенных планов число опытов составляет $n = 4$ /при $k = 3$/; $n = 8$ /при $k = 7$/; $n = 16$ /при $k = 15$/ и т.д.

Матрица планирования эксперимента составляется в соответствии с изложенным ранее. Коэффициенты уравнения регрессии определяются из выражения /4.10/. Для оценки воспроизводимости проводят параллельные опыты по всем строкам матрицы или, что делается чаще, ограничиваются опытами в одной точке факторного пространства. Обычно в качестве таковой принимают центр плана /нулевые уровни всех факторов/.

В последнем случае дисперсия воспроизводимости определятся по зависимости /4.12/. Среднеквадратичное отклонение i-го коэффициента уравнения регрессии

$$S_{b_i} = \sqrt{S_b^2 / n}. \qquad /4.18/$$

Значимость коэффициентов оценивается с использованием критерия Стьюдента по выражению /4.15/. При этом число степеней свободы $f = n_0 - 1$.

4.10. Планы второго порядка

Если в интересующей нас области описать процессы в объекте линейным уравнением не удается, то переходят к планам второго порядка.

Для получения коэффициентов регрессии в этом случае варьирования факторами на двух уровнях недостаточно. Переход к полному факторному эксперименту на трех уровнях связан с постановкой большого числа опытов. Так, для четырех факторов ПФЭ 3^4 требует $3^4 = 81$ опыт, а ПФЭ 3^5 - 243.

Бокс и Уилсон [7] обосновали возможность использования схем, в которых план типа 2^n дополняется звездными точками по две на каждый фактор, а также нулевыми в центре плана. На рис.4.3 показано расположение точек факторного пространства такого плана для двух входных переменных.

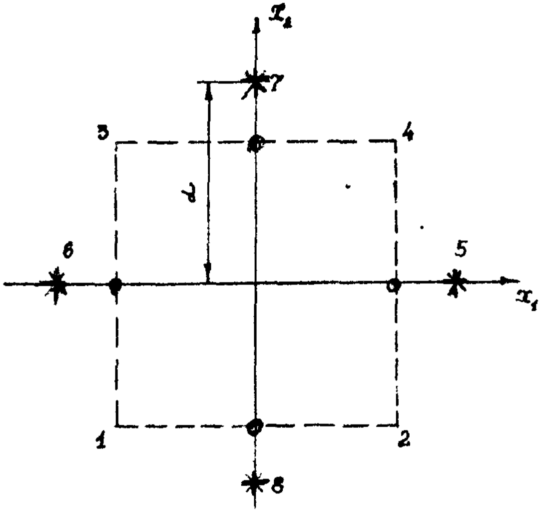


Рис.4.3. Положение точек факторного пространства в экспериментах

Известен ряд методов построения матриц, расчета коэффициентов регрессии и проверки адекватности планов второго порядка. Хорошие результаты дают центральные композиционные ротабельные планы, предложенные Боксом и Хантером [7]. Данные к построению матриц планов второго порядка приведены в табл.4.5.

Таблица 4.5

Наименование	ПФЭ 2^n				ПФЭ 2^{n-1}
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 5$
Число опытов ядра	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$
Число "звездных" точек	4	6	8	10	10
Число нулевых точек	5	6	7	10	6
Величина "звездного плеча" α	1,414	1,682	2,000	2,378	2,000

Для примера в табл.4.6 приведена матрица ротабельного плана второго порядка для трех факторов.

III Данные столбцов 4 - 6 используются при постановке опытов и расчете коэффициентов регрессии, а столбцов 3, 7 - 12 - только ~~в~~ при расчетах коэффициентов.

Коэффициенты регрессии определяются по следующим зависимостям:

$$b_0 = 0,1663\,(0y) - 0,05679\,(iiy);$$

$$b_i = 0,0732\,(iy);$$

$$b_{ii} = 0,0625\,(iiy) + 0,06889\,\Sigma(iiy) - 0,05679\,(0y);$$

$$b_{ij} = 0,125\,(ijy).$$

Здесь приняты обозначения:

$$(0y) = \sum_{u=1}^{N} y_u; \quad (iiy) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 y_u;$$

$$\Sigma(iiy) = \sum_{u=1}^{N} x_{1u}^2 y_u + \sum_{u=1}^{N} x_{2u}^2 y_u + \sum_{u=1}^{N} x_{3u}^2 y_u;$$

$$(ij) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u, \quad (ijy) = \sum_{u=1}^{N} \underbrace{x_{iu} x_{ju}}\, y_u.$$

Таблица 4.6

Блоки плана	Номер опыта	Факторы										Параметр
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ядро плана	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
	2	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	y_2
	3	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	y_3
	4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	y_4
	5	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	y_5
	6	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	y_6
	7	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	y_7
	8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8
"Звездные" точки	9	+1	1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0	y_9
	10	+1	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0	y_{10}
	11	+1	0	1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	y_{11}
	12	+1	0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	y_{12}
	13	+1	0	0	1,682	0	0	2,828	0	0	0	y_{13}
	14	+1	0	0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	y_{14}
Нулевые точки	15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{15}
	16	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{16}
	17	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{17}
	18	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{18}
	19	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{19}
	20	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{20}

для определения коэффициентов произвольного числа факторов, установления значимости коэффициентов регрессии, а также проверки адекватности можно рекомендовать [7].

4.11. Основные этапы экстремального эксперимента

Целью исследования часто является поиск оптимальных условий функционирования объекта. Их можно установить, используя методы математического анализа, если удается описать процесс уравнением второго порядка. При значительной нелинейности поверхности отклика этого сделать нельзя. В последнем случае ставят экстремальный эксперимент. Разработано несколько методов его проведения. Остановимся на методе "крутого восхождения".

Он включает следующие основные этапы.

1. В точке факторного пространства, которую исследователь считает близкой к оптимуму, ставят для малого числа факторов ПФЭ первого порядка, а для значительного числа – ДФЭ. Находят уравнение регрессии и проверяют его адекватность, чего всегда можно добиться соответствующим выбором интервалов варьирования факторов.

2. По уравнению регрессии определяют градиент изменения параметра

$$grad\,y = \sum_{i=1}^{k} (\partial y / \partial x_i)\, \ell_i ,$$

где ℓ_i – единичный фактор в направлении координаты x_i факторного пространства.

Перемещение вдоль градиента обеспечивает наиболее интенсивное "крутое" изменение параметра.

Нетрудно видеть, что частные производные

$$\partial y / \partial x_i = b_i .$$

3. Ставят ряд опытов /два-три/ в точках, лежащих на градиенте.

Для определения положения этих точек в факторном пространстве рассчитываются составляющие градиента:

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \Delta X_i ,$$

где ΔX_i – интервал варьирования фактора.

Выбирается базовый фактор, для которого произведение $b_i \Delta X_i = a$ является наибольшим. Для этого фактора выбирают шаг смещения. Эта процедура не является формализованной. Здесь многое зависит от опыта экспериментатора, а также априорной информации об объекте исследования

После выбора шага h_a определяют смещение для других факторов

$$h_i = (b_i \Delta X_i / a) h_a.$$

Полученное значение h_i округляют.

По данным опытов в точках, лежащих на градиенте, устанавливают положение частного экстремума в данном направлении.

4. В точке частного экстремума ставят новый факторный эксперимент. Находят уравнение регрессии. Проверяют его адекватность.

5. Ищут направление нового градиента и осуществляют "крутое восхождение" по нему в соответствии с изложенным ранее /этап 3/.

Поиск прекращается, когда линейная модель оказывается неадекватной. Это означает, что достигнута область оптимума. В ней ставят эксперимент второго порядка, по которому уточняют положение оптимума, или просто принимают наилучший из полученных результатов.

Вопросы к разделу 4

1. Дайте определение понятия "планирование эксперимента".
2. В чем суть многофакторного эксперимента, положенного в основу планирования эксперимента?
3. В чем отличие однофакторного эксперимента от многофакторного?
4. Назовите положительные стороны планирования эксперимента.

Вопросы к подразд.4.1

1. Каковы цели планов отсеивающего и основного эксперимента?
2. Чем отличаются цели планов аппроксимации и оптимизации?
3. Запишите уравнение, коэффициенты которого находятся при экспериментах плана первого порядка.
4. Каков вид полинома, коэффициенты которого определяются в планах второго порядка?
5. На скольких уровнях должны фиксироваться факторы при построении линейной модели объекта?
6. Поясните суть понятий "полный факторный эксперимент" и "дробный факторный эксперимент".

Вопросы к подразд.4.2

1. На основе каких данных устанавливаются параметры и факторы объекта исследования?
2. Назовите основной критерий оценки значимости влияния фактора на параметр.

3. Что называется уровнем фактора?

4. Какое различие между нулевым и верхним уровнем фактора?

5. Что понимается под интервалами варьирования и областью определения факторов?

6. Что такое кодированные значения факторов и как они определяются?

7. Покажите, как графически изображается область определения двух факторов, устанавливаемых на двух уровнях, до и после кодирования.

8. Чему равняется кодированное значение фактора на нижнем и верхнем уровне?

9. Составьте матрицу планирования эксперимента для двух факторов на двух уровнях.

10. Как называется в матрице планирования фактор x_0 и зачем он введен?

Вопросы к подразд.4.3

1. В чем суть приема построения матрицы планирования экспериментов, получившего название "прием чередования знаков"?

2. Приведите в качестве примера построение матрицы ПФЭ 2^3.

3. Какова суть свойства симметричности матрицы планирования ПФЭ 2^k? Какой математической зависимостью оно выражается?

4. Какой математической зависимостью выражается свойство нормировки матрицы планирования ПФЭ 2^k?

5. Какова суть свойства ортогональности матрицы планирования ПФЭ 2^k? Какой математической зависимостью оно выражается?

6. В чем суть свойства ротабельности матрицы планирования ПФЭ 2^k?

7. Составьте матрицу планирования ПФЭ 2^5.

Вопросы к подразд.4.4

1. В чем суть метода наименьших квадратов для определения коэффициентов уравнения регрессии?

2. Как определяются коэффициенты уравнения регрессии для ПФЭ 2^2?

3. Как определяются коэффициенты уравнения регрессии для ПФЭ 2^k?

4. Какую размерность имеют коэффициенты уравнения регрессии, в котором факторы кодированы?

5. Как по уравнению регрессии можно оценить силу влияния каждого фактора на параметр?

6. Предположим, что Вы располагаете уравнением регрессии, в котором факторы приведены в натуральных значениях. Как в данном случае оценить силу влияния каждого фактора на параметр?

7. Как привести уравнение регрессии, в котором факторы кодированы к виду, в котором факторы будут иметь первоначальное физическое значение?

Вопросы к подразд.4.5

I. В чем суть понятия "воспроизводимость опытов"?

2. Как классифицируются объекты исследования по воспроизводимости процессов в них?

3. Причины возникновения погрешностей при постановке параллельных опытов.

4. Что отражают построчные дисперсии и как определяется их значение?

5. С какой целью параллельные опыты выполняют в случайной последовательности?

6. Что понимают под рандомизацией опытов?

7. Что такое дисперсия воспроизводимости опытов, что она отражает и как определяется ее значение?

8. Как проверяется однородность построчных дисперсий S_u^2 ?

9. Можно ли по экспериментальным данным определять коэффициенты уравнения регрессии, если построчные дисперсии S_u^2 неоднородны?

10. В каких случаях можно вместо повторных опытов для каждой строки матрицы провести параллельные опыты только в одной точке факторного пространства?

11. Как выбираются нулевые точки факторного пространства?

12. Как определится дисперсия воспроизводимости при постановке повторных опытов только в одной /нулевой/ точке факторного пространства?

Вопросы к подразд.4.6

I. При каких условиях случайная величина является значимой?

2. Как определяется дисперсия коэффициента b_i уравнения регрессии для матрицы планирования ПФЭ 2^2?

3. Как определяется дисперсия коэффициента b_i уравнения регрессии при n опытах в матрице планирования?

4. Запишите выражение доверительного интервала для коэффициента уравнения регрессии.

5. С учетом каких факторов принимают значение критерия Стьюдента t_α при проверке значимости коэффициентов уравнения регрессии?

6. Как проверяется значимость коэффициентов в уравнениях регрессии?

Вопросы к подразд.4.7

1. Что понимают под адекватностью уравнения регрессии?

2. Что отражает дисперсия адекватности и как определяется ее значение?

3. Как определяется расчетное значение критерия Фишера / F-критерия/?

4. С учетом каких факторов определяют табличное значение F-критерия при проверке однородности дисперсий адекватности и воспроизводимости?

5. Какое число повторных опытов ставилось на каждом уровне фактора /ответьте, используя табл.4.3/?

6. Данные какой колонки из табл.4.3 подтверждают рандомизацию опытов?

7. С использованием какого критерия проверена однородность построчных дисперсий? Почему использован этот критерий?

Вопросы к подразд.4.8

1. По каким причинам нецелесообразно проведение ПФЭ при числе факторов большем четырех-пяти?

2. Дайте определение понятия "дробный факторный эксперимент".

3. В чем суть метода снижения числа опытов, на основе которого составляется матрица ДФЭ?

4. Преимущества применения на практике дробного факторного эксперимента.

5. Постройте матрицу дробного факторного эксперимента ДФЭ 2^{3-1}, в котором $X_3 = -X_1 \cdot X_2$.

6. Что такое генерирующее соотношение и определяющий контраст? Для каких целей используются эти понятия?

7. От чего зависит разрешающая способность реплики?

8. Как установить, какой эффект смешали с данным при организации ДФЭ?

9. Постройте матрицу дробного факторного эксперимента 2^{4-1} при генерирующем соотношении $X_4 = -X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$.

10. Постройте матрицу ДФЭ 2^{4-1} при генерирующем соотношении $X_4 = -X_1 \cdot X_3$.

Вопросы к подразд.4.9

1. С какой целью и на какой стадии исследования проводятся отсеивающие эксперименты?

2. На какие классы делятся планы в зависимости от соотношения между числом опытов n и определяемым числом коэффициентов ℓ?

3. Какие методы используются для выделения значимых факторов?

4. Анализ какой модели достаточен для отсеивания факторов с использованием ДФЭ?

5. Какие планы рассматриваются при проведении отсеивающих экспериментов с использованием ДФЭ?

6. Как оценивается воспроизводимость опытов при проведении отсеивающих экспериментов?

7. По какой форме определяется среднеквадратичное отклонение S_{bi} i -го коэффициента уравнения регрессии?

8. Как проверяется значимость коэффициентов уравнения регрессии?

9. Как при проверке значимости коэффициентов уравнения регрессии выбирают число степеней свободы для определения критерия Стьюдента?

Вопросы к подразд.4.10

1. Какова цель составления планов второго порядка?

2. Сколько уровней варьирования необходимо использовать для получения коэффициентов уравнения регрессии плана второго порядка?

3. Какие недостатки ПФЭ на трех и более уровнях?

4. Изобразите расположение точек факторного пространства в экспериментах плана второго порядка для двух факторов.

5. Каковы особенности построения центральных композиционных ротабельных планов второго порядка?

Вопросы к подразд.4.11

1. Какова цель постановки экстремального эксперимента?

2. Назовите основные этапы проведения экстремального эксперимента по методу "крутого восхождения".

3. Как определяется градиент изменения параметра в направлении координаты X_i факторного пространства при проведении экстремального эксперимента?

4. Как выбирается базовый фактор при проведении экстремального эксперимента?

5. Как выбирается шаг смещения базового фактора при проведении экстремального эксперимента?

6. Как определяется шаг смещения для других /небазовых/ факторов при проведении экстремального эксперимента?

7. Когда при постановке экстремального эксперимента поиск области оптимума прекращается?

8. Эксперимент какого порядка ~~/уровня/~~ ставится на заключительной стадии /в области оптимума/ при проведении экстремального эксперимента?

9. С какой целью в области оптимума при проведении экстремального эксперимента ставят эксперимент второго порядка?

Список литературы

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - М.: Наука, 1976. - 279 с.

2. Гидравлика и гидропривод / В.Г.Гейер, В.С.Дулин, А.Г.Боруменский, А.Н.Заря. - М.: Недра, 1981. - 295 с.

3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука, Глав.ред.физ.-мат. лит-ры, 1981. - 448 с.

4. Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирования /применительно к задачам электроэнергетики/ - М.: Высш.шк., 1984. - 439 с.

5. Смирнов Н.В., Дубин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. - М.: Наука, Глав.ред.физ.-мат. лит-ры, 1969. - 505 с.

6. Основы научных исследований / Руковод. авт. кол. Е.Г.Баранов. - К.: Выща шк., 1984. - 176 с.

7. Бондарь А.Г., Статюха Г.А. Планирование эксперимента в химической технологии. - К.: Выща шк., 1976. - 187 с.

8. Планирование эксперимента в технике / В.И.Барабащук, Б.П.Креденцер, В.И.Мирошниченко; Под ред. Б.П.Креденцера. - К.: Тэхника, 1984. - 200 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ