Недопекин Федор Викторович Гинкул Станислав Иванович Новикова Елена Викторовна

Учебное пособие

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Недопекин Ф.В., Гинкул С.И., Новикова Е.В.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Рекомендовано Ученым Советом ДонНУ от 30.11.2012, протокол 11, в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов высших учебных заведений

Недопекин Ф.В., Гинкул С.И., Новикова Е.В. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

ISBN 978-966-639-549-1

В учебном пособии изложены основные положения теплообмена. Рассмотрены как элементарные виды передачи тепла (теплопроводность, конвекция, излучение), так и такие теплообменные процессы как конденсация и кипение. Рассмотрены теоретические и практические подходы решения задач, связанных со стационарной и нестационарной теплопроводностью, использованием рекуперативных теплообменных аппаратов. Кратко рассмотрены численные методы дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности дифференциального уравнения диффузии.

При рассмотрении различных видов конвективного теплообмена дано достаточно глубокое физико-математическое представление процессов.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по «Физика», «Теплофизика», «Теплоэнергетика», направлениям «Промышленная специальностям «Промышленная теплотехника», теплоэнергетика», «Прикладное материаловедение», «Металловедение», «Физика» специализация «Компьютерная аэрогидродинамика теплофизика», а также может быть полезно студентам, обучающимся на других теплофизических и металлургических специальностях.

Учебное пособие состоит из 8 глав и представлено на 326 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электрометаллургия» ДонНТУ

А.А.Троянский

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Физика неравновесных процессов, метрология и экология»

В.В.Белоусов

Недопекин Ф.В., Гинкул С.И., Новикова Е.В. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

ISBN 978-966-639-549-1

В учебном пособии изложены основные положения теплообмена. Рассмотрены как элементарные виды передачи тепла (теплопроводность, конвекция, излучение), так и такие теплообменные процессы как конденсация и кипение. Рассмотрены теоретические и практические подходы решения задач, связанных со стационарной и нестационарной теплопроводностью, использованием рекуперативных теплообменных аппаратов. Кратко рассмотрены численные методы дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности дифференциального уравнения диффузии.

При рассмотрении различных видов конвективного теплообмена дано достаточно глубокое физико-математическое представление процессов.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по «Физика», «Теплофизика», «Теплоэнергетика», направлениям «Промышленная специальностям «Промышленная теплотехника», теплоэнергетика», «Прикладное материаловедение», «Металловедение», «Физика» специализация «Компьютерная аэрогидродинамика теплофизика», а также может быть полезно студентам, обучающимся на других теплофизических и металлургических специальностях.

Учебное пособие состоит из 8 глав и представлено на 326 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электрометаллургия» ДонНТУ

А.А.Троянский

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Физика неравновесных процессов, метрология и экология»

В.В.Белоусов

СОДЕРЖАНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	_
1 ПЕРЕДАЧА ТЕПЛА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ	
СТАЦИОНАРНОЕ И НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕПЛОВОЕ	
СОСТОЯНИЕ	8
1.1 Виды теплообмена. Общие понятия	
1.2 Теплопроводность	
1.3 Поле температур и концентраций	
1.4 Градиент температур	
1.5 Плотность теплового потока	
1.6 Коэффициент теплопроводности	15
1.7 Вывод дифференциального уравнения теплопроводности с	
использованием энтальпии и плотности теплового потока	20
1.8 Диффузионный поток	. 30
1.9 Второе уравнение диффузии (2 уравнение Фика)	. 31
1.10 Решение 2-го уравнения диффузии (2-го уравнени	R
Фика)	
1.11 Некоторые аналитические методы решения 2-го уравнени	
Фика	
1.12 Численный метод решения дифференциального уравнени	
диффузии	
1.13 Конечно-разностный метод	
1.13.1 Определение концентрации вещества во внутренни	
точках тела	
1.13.2 Определение концентрации вещества в граничны	
точках	
1.13.3 Метод прогонки	
КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН	51
2.1 Дифференциальные уравнения теплообмена	
2.2. Понятие о теории подобия и моделирование	
2.2.1 Общие понятия.	
2.2.2 Гидродинамическое подобие	
2.2.3 Тепловое подобие	
2.2.4 Диффузионное подобие	
2.2.5 Подобие при естественной конвекции	
2.4 Конвекция при свободном движении	
2.4.1 Тепловая конвекция от холодной вертикальной пластины	
2.4.2 Пограничный слоя при тепловой конвекции	
2.4.3 Теплоотдача при свободном движении	
в неограниченном пространстве	
2.4.4 Теплоотдача при свободном движении в ограниченном	07
пространстве	93
2.5 Вынужденная конвекция	
	··

	2.:	5.1 Гидродинамические условия развития процесса при	
		продольном омывании плоской поверхности	96
	2.:	5.2 Теплоотдача при продольном омывании плоской	
		поверхности	98
	2.5	5.3 Обтекание пластины малотеплопроводными и	
		высокотеплопроводными жидкостями	101
	2.6	Теплоотдача при течении жидкости в трубах	115
	2.6	5.1 Особенности движения и теплообмена в трубах	115
		5.2 Теплоотдача при ламинарном режиме	116
		6.3 Определение средней температуры жидкости	139
		6.4 Теплоотдача при турбулентном режиме	140
	2.7	Теплоотдача при поперечном обтекании труб	158
3.	ТЕПЛ	ООТДАЧА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА. ТЕПЛООБМЕН	
	ПРИ	КИПЕНИИ	165
	3.1	Теплоотдача при пленочной конденсации пара	165
	3.2	Теплоотдача при конденсации в трубах	170
	3.3	Влияние перегрева пара	173
	3.4	Общие представления о процессе кипения	174
	3.5	Теплообмен при пузырьковом кипении жидкости в большом	
		объеме при свободной конвекции	179
	3.6	Теплообмен при пленочном кипении	181
4	ПЕРІ	ЕДАЧА ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ	185
	4.1	Общие сведения и основные понятия	185
	4.2	Природа лучистой энергии	185
	4.3	Виды лучистых потоков	187
	4.4	Законы теплового излучения	190
	4.5	Черные температуры	199
	4.6	Лучистый теплообмен между телами	202
	4.7	Угловые коэффициенты и свойства лучистых потоков	204
	4.8	Теплообмен излучением между двумя поверхностями через	
		лучепрозрачную среду	206
	4.9	Излучение в окружающее пространство	208
	4.10	Излучение через отверстия в печных стенках	208
	4.11	Теплообмен в рабочем пространстве печи	209
	4.12	Теплообмен при установке экрана	210
	4.13	Излучение газов и паров	212
	4.14	Закон Бугера	216
	4.15	Геплообмен излучением между газом и стенкой	217
		Сложный теплообмен. Коэффициент теплоотдачи излучением.	218
5		ЕДАЧА ТЕПЛА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ ПРИ	
	CTAL	"ШОНАРНОМ ТЕПЛОВОМ СОСТОЯНИИ	220
	5.1	Передача тепла теплопроводностью через плоскую	
		однослойную стенку (граничные условия 1-го рода)	220
	5.2	Передача тепла теплопроводностью через плоскую	
		многослойную стенку (граничные условия 1-го рода)	223

5.3	Передача тепла теплопроводностью через цилиндрическую
	однослойную стенку (граничные условия 1-го
	рода)
5.4	Передача тепла теплопроводностью через цилиндрическую
	многослойную стенку (граничные условия 1-го
	рода)
5.5	Передача тепла теплопроводностью через шаровую стенку
5 6 5	(граничные условия I рода)
	еплопроводность при наличии внутренних источников тепла
	ЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ
	ДАМИ
6.1	
	делительную однородную и многослойную плоскую
<i>(</i> 2	стенку
6.2	Передача тепла от одной среды к другой через
6.2	цилиндрическую однослойную стенку
6.3	Передача тепла от одной среды к другой через цилиндрическую многослойную стенку
6.4	Тепловая изоляция трубопроводов. Критический радиус
0.4	изоляции
6.5	Передача тепла от одной среды к другой через шаровую
0.5	стенку
6.6	Пути интенсификации теплопередач
	ТАЦИОНАРНОЕ ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ
7.1	Аналитическое описание процесса.
7.2	Решение задачи об охлаждении пластины при граничных
	условиях III рода
	7.2.1 Математическое описание процесса
	7.2.2 Постановка задачи
	7.2.3 Решение дифференциального уравнения
	7.2.4 Подчинение решения начальным и граничным
	условиям
	7.2.5 Анализ трансцендентного уравнения
	7.2.6 Частное решение задачи
	7.2.7 Окончательное решение
7.3	Определение количества тепла, отданного пластиной в
	процессе охлаждения
7.4	Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров
7.5	Охлаждение цилиндра конечной длины
7.6	Определение средней температуры
7.7	Численный метод решения дифференциального уравнения
	теплопроводности
7.8	Конечно-разностный метод

		7.8.1	Определение температуры во внутренних точках тела	273
			2 Определение температуры в граничных точках	275
		7.8.3	В Метод прогонки	278
8	TEC	АН RN90	ГРЕВА И ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ	280
	8.1	Поняти	ие о термически тонких и массивных телах	281
	8.2		ие формы тела на скорость нагрева. Коэффициент	
		матери	альной нагрузки	282
	8.3	-	в термически тонких тел ($\mathrm{Bi} \to 0$) постоянным	
			ым потоком	283
	8.4		в термически тонких тел ($Bi \to 0$) в печи с постоянной	
		-	атурой	286
	8.5		в термически массивных тел ($\text{Bi} \to \infty$) постоянным	
		теплов	ым потоком	291
	8.6	Нагрев	в термически массивных тел ($\mathrm{Bi} \to \infty$) в печи с	
		постоя	нной температурой	295
	8.7		метричный нагрев тел	301
	8.8	Теплос	обменные аппараты. Рекуперативные теплообменники	302
		8.8.1	Основные положения теплового расчета	304
		8.8.2	Средний температурный напор. Коэффициент	
			теплопередачи	306
		8.8.3	Расчет конечной температуры рабочих жидкостей	311
СПІ	ACO	К ЛИТЕР	РАТУРЫ	315
			1 - Физические свойства веществ	318
			2 - Теплофизические свойства углеродистых	
стал				322

ВВЕДЕНИЕ

Наука о переносе тепла и массы является одной из важных областей знания. современных Процессы переноса являются определяющими во многих технологических операциях и природных явлениях. В технике роль процессов теплопереноса особенно В технологических значительна реакторах, летательных аппаратах, В котлах И печах, различных теплообменных аппаратах, в холодильных устройствах, при отоплении зданий, в нанотехнологиях и т.д.

Материалы, представленные в учебном пособии, разбиты на восемь глав и охватывают все теоретические и некоторые практические основы теплопереноса. Первая, вторая и четвертая главы посвящены рассмотрению элементарных видов передачи теплопроводности, конвекции излучению тепла, T.e. И соответственно. В третьей главе представлены сведения о передаче тепла при конденсации паров и кипении жидкостей. Пятая и шестая глава работы рассматривают вопросы стационарной передачи тепла через стенки при различных вариантах граничных условий. Решение задачи нестационарного теплового состояния тел при помощи аналитических и численных методов представлено в седьмой главе. Практические вопросы теорию теплопередачи, включая нагрева материалов теплообменных использование рекуперативных аппаратов, рассмотрены в восьмой главе.

Отличительными особенностями данного учебного пособия являются, во-первых, комплексное использование инженерных методов и достаточно глубокого физико-математического представления процессов, особенно при изучении конвективного теплообмена; во-вторых, рассмотрение в одном пособии как чисто теоретических вопросов теплопереноса, так и их практического приложения.

Учебное пособие предназначено студентов, ДЛЯ «Теплофизика», направлениям «Физика», обучающихся ПО «Теплоэнергетика», «Промышленная специальностям теплотехника», «Промышленная теплоэнергетика», «Прикладное материаловедение», «Металловедение», «Физика» специализация «Компьютерная аэрогидродинамика и теплофизика», а также других теплофизических и металлургических специальностей.

1 ПЕРЕДАЧА ТЕПЛА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ. СТАЦИОНАРНОЕ И НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ

1.1 Виды теплообмена. Общие понятия

Первым теплообмена теплообмен видом является посредством теплопроводности. Он характеризуется тем, что для осуществления необходимо, чтобы пространство было веществом, что теплообмен заполнено a также тем, осуществляется только между частицами тела, находящимися в непосредственном соприкосновении друг с другом. проводность наблюдается в жидкостях и газах, если эти вещества неподвижны.

Передача тепла теплопроводностью описывается гипотезой (законом) Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \cdot F \cdot \tau, \, \text{Дж.}$$
 (a)

Если известна температура в двух точках тела t_1 и t_2 , находящихся на расстоянии Δx (рисунок 1.A), то количество тепла может быть рассчитано:

$$Q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{\Lambda x} \cdot F \cdot \tau,$$

где λ – коэффициент теплопроводности, Bт/(м·К);

 t_1 , t_2 — температура в различных точках одного и того же тела, °C; F — площадь сечения, через которое передается тепло, м²;

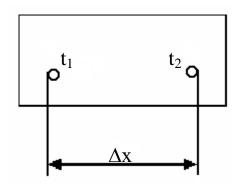


Рисунок 1.A – Схема распространения тепла между двумя точками

 τ – время, с.

Вторым видом является теплообмен конвекцией. Конвективный теплообмен осуществляется перемещающимися в пространстве слоями жидкости или газа. В этом случае перенос тепла осуществляется в результате

перемещения или перемешивания слоев жидкости или газа. Количество тепла, которое передается при конвективном теплообмене, определяется законом Ньютона—Рихмана:

$$Q = \alpha(t_1 - t_2)F \cdot \tau, Дж, \tag{6}$$

где α – коэффициент теплоотдачи, $B\tau/(M^2\cdot K)$;

 t_1 , t_2 – температура разных тел, °С;

F – поверхность теплообмена, м²;

 τ – время, с.

В зависимости от причин, вызывающих движение жидкости или газа, различают конвективный теплообмен при свободном движении (свободная конвекция) и вынужденном движении (вынужденная конвекция). Если температуры различных точек среды неодинаковы, то среда будет иметь в этих точках различную плотность. Различная плотность среды служит причиной возникновения в ней потоков. Когда причиной потоков является только неодинаковая плотность среды, то говорим о свободном конвективном потоке. Может существовать еще целый ряд внешних причин, вызывающих возникновение потоков (вентилятор, дымосос, насос и т.д.) и поддерживающих их дальнейшее существование. В этом случае говорим о вынужденном конвективном потоке.

Третьим видом теплообмена теплообмен является характеризуется тем, излучением. Он энергии, ЧТО часть принадлежащей телу, превращается в лучистую энергию, и в этой новой форме она передается через пространство между телами. Лучистая энергия, попадая на другие тела, может частично поглощаться телом и превращаться в тепловую энергию. Этот обратный переход энергии теплового излучения в тепловую энергию может быть и не полным, т.е. часть теплового излучения может быть отражена или пропущена этим новым телом.

Если передача тепла теплопроводностью и конвекцией может осуществляться только при наличии материальной среды, то тепловое излучение распространяется и в вакууме. Количество тепла, которое передается излучением между двумя абсолютно черными телами, используя закон Стефана-Больцмана, можно определить:

$$Q = \sigma_0 \left(T_1^4 - T_2^4 \right) F \cdot \tau, Дж, \tag{B}$$

где σ_0 – коэффициент излучения абсолютно черного тела, $\mathrm{Bt/(m^2 \cdot K^4)};$

T – температура одного тела, K;

F – поверхность теплообмена, м²;

 τ – время, с.

Коэффициент излучения абсолютно черного тела равен $\sigma_0=5,67\cdot10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴). Эта величина очень маленькая, а температура в четвертой степени большая. В связи с этим пользуются коэффициентом излучения $c_0=5,67$ Вт/(м²·К⁴). Тогда выражение для количества тепла записывается следующим образом:

$$Q = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot F \cdot \tau . \tag{\Gamma}$$

Для всех трех видов передача тепла будет осуществляться при наличии разности потенциалов (разности температур).

Основные понятия. Общее количество передаваемого тепла Q измеряется в Дж. Количество тепла, которое передается через произвольную поверхность за единицу времени, называется тепловым потоком или мощностью теплового потока, Вт=Дж/с

$$Q^* = \frac{Q}{\tau},\tag{d}$$

Количество тепла, которое передается через единичную поверхность в единицу времени, называется удельным тепловым потоком или плотностью теплового потока, $\mathrm{Bt/m}^2$

$$q = \frac{Q}{F \cdot \tau}.$$
 (e)

Для различных видов передачи тепла плотность теплового потока выражается:

теплопроводности –
$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$$
; (a*)

конвекции
$$-q=\alpha(t_1-t_2);$$
 (б*)

излучения
$$- q = c_0 \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right).$$
 (г*)

1.2 Теплопроводность

Теплопроводность — это передача тепла от одних частей тела к другим, обусловленная разностью температур без заметного перемещения частиц тела. Перенос тепла осуществляется за счет хаотического теплового движения или за счет тепловых колебаний микрочастиц (молекул, атомов, ионов).

В простейшей теории теплопроводности существуют 2 модели передачи тепла.

Передача тепла в результате колебательного движения молекул и атомов в кристаллической решетке. С увеличением кинетическая температуры энергия молекул увеличивается, и в результате их колебательного движения при столкновении с более холодными молекулами часть энергии Процесс молекулам. передачи передается ЭТИМ тепла теплопроводностью результате колебательного В движения обозначим через λ_{κ} .

Передача тепла свободными электронами. В простейшей теории теплопроводности принимается, что в металлах имеются свободные электроны, ведущие себя подобно молекулам газа. Эти электроны, перемещаясь между атомами твердого тела, осуществляют передачу тепла теплопроводностью. Процесс передачи тепла электронами проводимости обозначим через λ_3 .

Передача тепла свободными электронами гораздо выше, чем в результате колебательного движения, то есть $\lambda_9 >> \lambda_K$. В связи с этим коэффициент теплопроводности металлов намного больше, чем неметаллов.

1.3 Поле температур и концентраций

При наличии в некоторой среде неоднородного поля температуры t (x, y, z, τ) в ней неизбежно возникает процесс переноса тепла. В соответствии со вторым началом термодинамики этот процесс осуществляется в направлении уменьшения температуры, то есть из области с большей температурой в область с меньшей. Для характеристики этого процесса используется понятие вектора плотности теплового

потока q, проекция которого на нормаль к некоторой поверхности представляет собой количество тепла, проходящее через единицу этой поверхности в единицу времени.

Точно также при наличии в среде неоднородного поля концентраций некоторого i-го компонента смеси c_i (x, y, z, τ) происходит процесс переноса массы этой примеси. Этот перенос также происходит в направлении уменьшения концентрации примеси и характеризуется вектором плотности потока массы проекция которого на нормаль некоторой примеси j_i , поверхности представляет собой примеси, количество проходящее через единицу поверхности в единицу времени.

Процессы переноса тепла и массы (тепло- и массообмен) могут осуществляться за счет различных механизмов. Если перенос тепла осуществляется за счет хаотического теплового движения или тепловых колебаний микрочастиц (молекул, атомов, ионов), то этот процесс называется теплопроводностью. Если перенос тепла осуществляется в движущейся жидкости или газе за счет перемещения объемов из области с одной температурой в область с другой, то такой процесс называется конвективным или конвекцией тепла.

Очевидно, что имеются аналогичные механизмы массобмена. Если перенос массы происходит за счет теплового ионов), движения молекул (атомов, TO ОН называется диффузией. Если перенос массы молекулярной обусловлен движением жидкости или газа, то говорят о конвективном переносе.

Процессы тепло- и массообмена протекающие в двух фазной системе на границе раздела фаз, например, тепло- и массобмен между жидкостью (газом) и твердой поверхностью, называются, соответственно, теплоотдачей и массоотдачей.

Если в каком-то теле по всему объему имеется различная температура, то с течением времени в этом теле будет происходить выравнивание температуры. Процесс передачи тепла сопровождается изменением температуры как в пространстве, так и во времени

$$t = f(x, y, z, \tau).$$

Совокупность значений температуры для всех точек тела в данный момент времени называется температурным полем. Если

температура не меняется во времени, то такое температурное поле называется стационарным

$$t = f(x, y, z);$$
 $\frac{\partial t}{\partial \tau}\Big|_{v} = 0.$

При стационарном температурном поле температура в различных точках тела может быть различной, но с течением времени она не меняется.

Если температурное поле меняется во времени, то такое температурное поле называется нестационарным

$$t = f(x, y, z, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial \tau}\Big|_{v} \neq 0.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и с концентрацией. Совокупность значений концентрации i-го компонента называется полем концентраций. Если концентрация i-го компонента не меняется во времени, то такое поле называют стационарным:

$$c_i = f(x, y, z);$$
 $\frac{\partial c}{\partial \tau}\Big|_{y} = 0.$

В том случае, если концентрация вещества меняется во времени, то такое поле концентраций называют нестационарным:

$$c_i = f(x, y, z, \tau); \quad \frac{\partial c}{\partial \tau}\Big|_{v} \neq 0.$$

1.4 Градиент температур

При любом температурном поле в теле всегда имеются точки с одинаковой температурой. Геометрическое место таких точек образует изотермическую поверхность. Так как в одной и

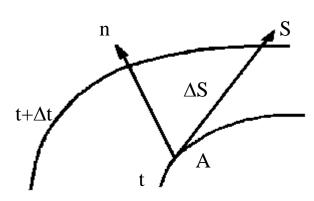


Рисунок 1.1 – К определению температурного градиента

той же точке пространства одновременно не может быть двух различных температур, то изотермические поверхности друг с другом не пересекаются, все они или замыкаются, или кончаются на границах тела.

Рассмотрим две изотермические поверхности с тем-

пературами t и $t+\Delta t$. Перемещаясь из какой-либо точки A (рисунок 1.1), можно обнаружить, что интенсивность изменения температуры по различным направлениям неодинакова. При перемещении по изотермической поверхности изменения температуры не обнаружим.

Если же перемещаться вдоль какого-то направления S, то, пройдя расстояние ΔS , обнаружим изменение температуры на величину Δt . Наибольшую разность температур на единицу длины будем наблюдать в направлении нормали к изотермной поверхности.

Предел отношения изменения температуры Δt к расстоянию между изотермическими поверхностями по нормали Δn , когда Δn стремиться к нулю, называется градиентом температуры и обозначается одним из следующих символов:

$$\lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{\partial t}{\partial n} = gradt = \nabla t.$$

Градиент температуры является вектором, направленным по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры. По физическому смыслу он представляет собой изменение температуры на единицу длины $-\frac{K}{M}$. За положительное направление градиента принимается направление возрастания температуры.

1.5 Плотность теплового потока

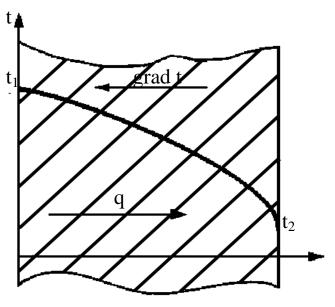


Рисунок 1.2 – К определению теплового потока

Тепло самопроизвольно переносится только В убывания сторону температуры. Рассмотрим плоскую стенку, ПО толщине которой поддерживается различная температура (ри-1.2). сунок Плотность теплового потока есть направление вектор которого совпадает направлением распрост-Изучая ранения тепла.

процесс теплопроводности в твердых телах, Фурье экспериментально установил, что количество переданного тепла пропорционально градиенту температур:

$$q = -\lambda \cdot gradt. \tag{1.1}$$

Плотность теплового потока величина положительная. В направлении распространения тепла градиент температуры есть величина отрицательная, поэтому в уравнении Фурье стоит знак «-», то есть согласно постулату Фурье вектор плотности теплового потока \bar{q} пропорционален по модулю градиенту температуры и направлен в сторону убывания температуры. Процесс передачи тепла происходит тем интенсивнее, чем больше градиент температуры, чем более резко происходит падение температуры.

Введем обозначение:

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho},\tag{1.2}$$

где a — коэффициент температуропроводности, m^2/c ; c_p — изобарная теплоемкость, $Дж/(кг \cdot K)$; ρ — плотность, $кг/m^3$.

Будем считать, что изобарная теплоемкость и плотность постоянные величины. Произведение $c_p \cdot \rho$ представляет собой объемную теплоемкость c, Дж/(м³ · К), то есть $c = c_p \cdot \rho$.

Объемная энтальпия i, Дж/м³, $i = c \cdot t$ или $i = c_p \cdot \rho \cdot t$.

С учетом изложенного выражение закона Фурье можно переписать в следующем виде:

$$\overline{q} = -a \cdot c_p \cdot \rho \cdot gradt = -a \cdot gradi. \tag{1.3}$$

В такой формулировке закон Фурье означает, что плотность теплового потока пропорциональна градиенту объемной энтальпии.

1.6 Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности является физическим свойством тела и характеризует его способность проводить тепло

$$\lambda = \frac{Q}{F\tau \frac{\partial t}{\partial x}}.$$
 (1.4)

Если принять, что сечение, через которое передается тепло, $F=1\text{M}^2$, время передачи тепла $\tau=1\text{C}$ и градиент температуры в направлении передачи тепла $\frac{\partial t}{\partial x} = 1\frac{K}{M}$, то коэффициент теплопроводности численно равен количеству тепла Q, которое передается через единичную поверхность поперечного сечения за единицу времени при градиенте температуры равном единице

$$[\lambda] = \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{K}}}{M^2 \cdot c \cdot \frac{K}{M}} = \frac{BT}{M \cdot K}.$$

Вопросы физики процесса передачи тепла теплопроводностью являются недостаточно изученными, нет ни одной теории теплопроводности, которая позволила бы однозначно решить задачу для различных материалов. Все теоретические формулы имеют ограниченное применение. Нет универсальной закономерности, позволяющей определить теплопроводность любого чистого материала.

Наибольшее распространение получила теория Дебая. Теория Дебая позволяет получить некоторые теоретические зависимости, совпадающие с экспериментом. До настоящего времени коэффициент теплопроводности приходится определять опытным путем и эти данные использовать на практике. Большинство определения коэффициента методов ИЗ теплопроводности основано на измерении теплового потока и градиента температур в заданном веществе. Так как тела имеют различную температуру, а при наличии теплообмена и в самом теле температура будет распределена неравномерно, то в первую коэффициента знать зависимость очередь важно теплопроводности от температуры. Опыты показывают, что для многих материалов с достаточной для практики точностью зависимость коэффициента теплопроводности от температуры можно принять линейной:

$$\lambda_t = \lambda_0 (1 \pm a t), \tag{1.5}$$

где λ_t – коэффициент теплопроводности при температуре t;

 λ_0 – коэффициент теплопроводности при температуре t=0°C; a – постоянная , определяемая опытным путем.

Говоря о коэффициенте теплопроводности, следует отметить, что λ зависит от большого числа факторов: химического состава, наличия примесей, степени кристаллизации и размеров кристаллов, пористости, формы пор, размеров пор, размеров трещин, их ориентации, термообработки материала, средней температуры, величины теплового потока, давления и целого ряда других факторов, которые не всегда можно учесть.

Коэффициент теплопроводности газов. Для газообразных веществ процессы переноса тепла связаны с переносом молекул в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа. При этом коэффициент теплопроводности определяется соотношением

$$\lambda = \frac{1}{3} \overline{w} \bar{l} c_{\nu} \rho, \tag{1.6}$$

где \overline{w} – средняя скорость перемещения молекул газа, м/с;

 \bar{l} — средняя длина свободного пробега молекул газа между их соударениями, м;

 c_v – теплоемкость газа при постоянном объёме, Дж/(кг·К);

 ρ – плотность газа, кг/м³.

Коэффициент теплопроводности газов мало изменяется в зависимости от давления. С увеличением давления увеличивается ρ и уменьшается \bar{l} и произведение $\bar{l}\rho$ сохраняется постоянным.

С увеличением температуры должно увеличиваться и значение коэффициента теплопроводности. Легкие газы должны перемещаться более быстро, а значит и перенос энергии осуществляться быстрее.

Коэффициент теплопроводности смеси газов можно вычислить по формуле Брокау

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\sum 0.01 \lambda_i m_i + \frac{1}{\sum \frac{m_i \cdot 0.01}{\lambda_i}} \right] \text{BT/(M·K)}, \tag{1.7}$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности i-го газа, $Bt/(m\cdot K)$; m_i – % содержания i-го газа в смеси, %.

Коэффициент теплопроводности жидкостей. Механизм распространения тепла В капельных жидкостях представить как перенос энергии путем нестройных упругих колебаний. Для большинства жидкостей эта теория нашла хорошее подтверждение. На основании этой теории была формула коэффициента получена ДЛЯ теплопроводности, имеющая следующий вид

$$\lambda = A \cdot \frac{c_p \rho^{4/3}}{\mu^{1/3}},\tag{1.8}$$

где $c_{\scriptscriptstyle p}$ – теплоемкость жидкости при постоянном давлении;

 ρ – объёмная плотность жидкости;

 μ — молекулярная масса.

Коэффициент А, пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, не зависит от природы жидкости, но зависит от температуры

$$A \cdot c_p \approx const$$
.

Так как ρ жидкости с повышением температуры убывает, то λ с повышением температуры уменьшается. Исключение составляют вода и глицерин.

Коэффициент теплопроводности твердых тел. Металлы и сплавы. В металлах основным передатчиком тепла являются свободные электроны. Они являются хорошим проводником электричества и тепла

$$\lambda = \lambda_{\kappa} + \lambda_{\gamma}$$
.

Передача тепла при помощи колебательных движений атомов не исключается, но она незначительна по сравнению с переносом энергии электронным газом. Вследствие движения свободных электронов, происходит выравнивание температуры во всех точках нагревающегося или охлаждающегося металла. Свободные электроны движутся как из областей более нагретых в области менее нагретые, так и в обратном направлении. При повышении температуры вследствие усиления тепловых неоднородностей рассеивание электронов увеличивается. Это влечет за собой уменьшение коэффициента теплопроводности.

При наличии разного рода примесей коэффициент теплопроводности металлов резко убывает. Коэффициент теплопроводности металла при 1 % углерода падает на 40 %.

В отличие от чистых металлов коэффициенты теплопроводности сплавов при повышении температуры увеличиваются

Диэлектрики-неметаллы. В диэлектриках с повышением температуры коэффициент теплопроводности обычно увеличивается. Как правило, для материалов с большой объёмной плотностью коэффициент теплопроводности имеет более высокое значение. Он зависит также от структуры материала, его пористости и влажности.

Числовые значения коэффициента теплопроводности.

Для серебра λ =418 Bт/(м·К); меди – 390 Bт/(м·К); алюминия – 209 Bт/(м·К); цинка – 113 Bт/(м·К); свинца – 35 Bт/(м·К).

Наличие примесей, летучих элементов существенно сказывается на коэффициенте теплопроводности металла. Даже небольшие по процентному соотношению примеси сильно понижают коэффициент теплопроводности.

Следы мышьяка в меди приводят к снижению коэффициента теплопроводности $\lambda=142~\mathrm{Bt/(m\cdot K)}.$

Очень чистое железо имеет коэффициент теплопроводности λ =94,6 BT/(м·K). Небольшие примеси кремния Si=0,007%, фосфора P=0,007%, углерода C=0,02% приводят к тому что коэффициент теплопроводности снижается и равен λ =75,6 BT/(м·K)

Чем больше примесей в стали, тем меньше λ . Термическая обработка существенные может вносить изменения. Так имеет коэффициент теплопроводности на закаленная сталь 10...20 % ниже сырой стали. Большинство сталей при высоких коэффициент температурах примерно имеют одинаковый теплопроводности $\lambda \approx 25$ Bт/(м·К).

Коэффициент теплопроводности для различных материалов меняется в широких пределах:

коэффициент теплопроводности газов колеблется в пределах

$$\lambda = 0.06...0.5 \, \text{BT} / (\text{M} \cdot \text{K});$$

 коэффициент теплопроводности капельных жидкостей лежит в пределах

$$\lambda = 0.07...0.7 \, \text{BT}_{(M \cdot K)};$$

коэффициент теплопроводности строительных И теплоизоляционных материалов меняется

$$\lambda = 0.02...3.0 \, \text{BT} / (\text{M} \cdot \text{K});$$

коэффициент теплопроводности металлов лежит В пределах

$$\lambda = 20...400 \, \text{BT} / \text{(M \cdot K)}.$$

Учитывая такое различие коэффициента теплопроводности, в технических расчетах значения коэффициента теплопроводности берутся по справочным таблицам.

1.7 Вывод дифференциального уравнения теплопроводности плотности теплового потока использованием энтальпии

В случае отсутствия внутренних источников тепла при стационарном тепловом состоянии тепла. количество подведенное к телу, равно количеству тепла, прошедшему через

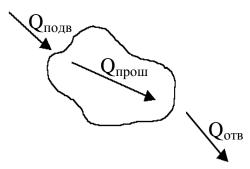


Рисунок 1.3 – Схема распространения тепла

тело, и равно количеству тепла, отведенному OT тела, T.e. $Q_{no\partial s} = Q_{npow} = Q_{oms}$ (рисунок 1.3).

При стационарном тепловом состоянии каждая точка тела сохраняет неизменной температуру времени BO $\partial t/\partial \tau = 0$. При нестационарном тепловом состоколичество тепла, подвеиинк денное к телу не равно количеству отведенного тепла, т.е. $Q_{\text{подв}} \neq Q_{\text{отв}}$. Если $Q_{\text{подв}} > Q_{\text{отв}}$, происходит

нагрев тела, при $Q_{\text{полв}} < Q_{\text{отв}}$ охлаждение (рисунок 1.4). При нестационарном тепловом температура каждой состоянии точки тела меняется во времени

 $(\partial t/\partial \tau \neq 0)$.

При массопереносе стационарное состояние будет количество подведенного вещества равно прошедшему и

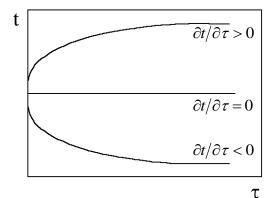


Рисунок 1.4 – Характер изменения температуры в теле

отведенному: $G_{no\partial s} = G_{npow} = G_{oms}$. При стационарном состоянии каждая точка тела сохраняет неизменной концентрацию во времени $\frac{\partial c}{\partial \tau} = 0$.

При нестационарном состоянии количество вещества, подведенное к телу, не равно количеству вещества отведенного от тела $G_{no\partial s} \neq G_{oms}$ и концентрация вещества каждой точки меняется во времени, т.е. $\frac{\partial c}{\partial \tau} \neq 0$.

Для вывода дифференциального уравнения теплопроводности выделим в теле элементарный объем с размерами dx, dy, dz, считая физические параметры λ , c_p и ρ постоянными (рисунок 1.5). Дифференциальное уравнение теплопроводности показывает в общем виде зависимость температуры от времени и

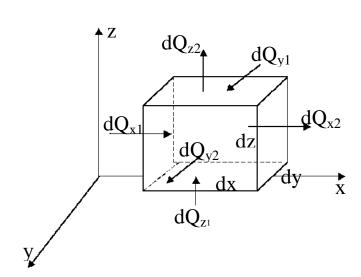


Рисунок 1.5. – К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

B координат. основу вывода дифференциальн уравнения ОГО теплопроводност и положен закон сохранения энергии, который формулируется количество так: $dQ_{\rm T}$, тепла введенное элементарный объем извне $d\tau$ время

теплопроводностью, а также от внутренних источников $dQ_{\rm V}$, равно изменению внутренней энергии вещества элементарного объема

$$dQ = dQ_{\rm T} + dQ_{\rm V}. \tag{1.9}$$

Предположим, что отсутствуют внутренние источники тепла. Обозначим через dQ_{x1} , dQ_{y1} , dQ_{z1} количество тепла, которое подводится к элементарному объему в результате теплопроводности за время $d\tau$ в направлении осей x, y, z, а через dQ_{x2} , dQ_{y2} , dQ_{z2} – количество тепла, которое отводится от

элементарного объема в результате теплопроводности за время $d\tau$ в направлении осей x, y, z. Рассмотрим распространение тепла в направлении оси x. Предположим, что подводится тепла больше, чем отводится, т.е. $dQ_{x1}>dQ_{x2}$. Тогда количество тепла, которое останется в элементарном объеме, при его распространении вдоль оси $dQ_x=dQ_{x1}-dQ_{x2}$.

Найдем количество тепла, которое подводится к левой грани в направлении оси x. Предположим, что на левой грани объемная энтальпия равна i. Тогда

$$dQ_{x1}=q\cdot dF\cdot d\tau\,,$$
 где $q=-a\cdot gradi=-a\frac{\partial i}{\partial x};\;dF=dydz\,.$

После подстановки получим

$$dQ_{x1} = -a\frac{\partial i}{\partial x}dydzd\tau. (1.10)$$

Количество тепла, которое в результате теплопроводности отводится от правой грани в направлении оси x

$$dQ_{x2} = qdF \cdot d\tau. \tag{1.11}$$

На правой грани значение плотности теплового потока равно

$$q = -a\frac{\partial i_1}{\partial x},\tag{1.12}$$

где i_1 – значение энтальпии на правой грани.

энтальпии i_1 на правой грани Значение определяем следующим образом. На левой грани величина энтальпии равна і, градиент энтальпии $\partial i/\partial x$ характеризует изменение энтальпии на единицу длины, расстояние от левой грани до правой в направлении оси x равно dx, и энтальпия на правой грани будет энтальпии левой отличаться OTзначения на грани величину $\partial i/\partial x \cdot dx$. Тогда энтальпия $i_1 = i + \partial i/\partial x \cdot dx$. Количество тепла, которое отводится от правой грани равно

$$dQ_{x2} = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau,$$

$$dQ_{x2} = -a \frac{\partial i}{\partial x} dy dz d\tau - a \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} dx dy dz d\tau.$$

Тогда

$$dQ_{x} = -a\frac{\partial i}{\partial x}dydzd\tau - \left[-a\frac{\partial i}{\partial x}dydzd\tau - a\frac{\partial^{2}i}{\partial x^{2}}dxdydzd\tau\right]$$
$$= a\frac{\partial^{2}i}{\partial x^{2}}dxdydzd\tau.$$

Рассматривая процесс передачи тепла в направлении осей y и z, аналогично можно записать

$$dQ_{y} = a \frac{\partial^{2} i}{\partial y^{2}} dx dy dz d\tau; \quad dQ_{z} = a \frac{\partial^{2} i}{\partial z^{2}} dx dy dz d\tau.$$

Количество тепла, которое остается в элементарном объеме при передаче тепла теплопроводностью в направлении осей x, y и z равно

$$dQ_T = dQ_x + dQ_y + dQ_z; (1.13)$$

$$dQ_T = a \left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \right) dx dy dz d\tau.$$
 (1.14)

Это количество тепла идет на изменение внутренней энергии тела

$$dQ = di \cdot dV$$
, где $dV = dxdydz$.

Энтальпия является функцией координат и времени, т.е. $i=f(x,y,z,\tau)$. В приведенном уравнении изменение энтальпии происходит во времени. Известно, что частный дифференциал функции нескольких переменных по одной из переменных, например, по τ определяется равенством

$$d_{\tau}i = (\partial i/\partial \tau)d\tau$$
.

Тогда получим

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} d\tau dx dy dz = a \left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \right) dx dy dz d\tau$$

$$u \qquad \qquad \frac{\partial i}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \right).$$

Заменив энтальпию $i=c_{\mathfrak{p}}\cdot\rho\cdot t$, получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t \,, \tag{1.16}$$

где
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
 - оператор Лапласа.

любого физического Изучение явления сводится К зависимости установлению между величинами, Для сложных характеризующими это явление. физических определяющие процессов, величины которых существенно изменятся в пространстве и времени, установить зависимость между этими величинами очень трудно. В этих случаях на помощь приходит метод математической физики, который исходит из того, что ограничивается промежуток всего пространства рассматривается И3 элементарный объём. Выбранные элементарный объём dV и элементарный промежуток $d\tau$, В пределах которого рассматривается изучаемый процесс, с математической точки зрения являются величинами бесконечно малыми.

При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности. Для облегчения вывода дифференциального уравнения сделаем следующие допущения.

- тело однородно и изотропно;
- физические параметры постоянны (λ, c, ρ) ;
- деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, является очень малой величиной по сравнению с самим объёмом;
- его агрегатное состояние не меняется.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии, который в рассматриваемом случае может быть сформулирован следующим образом: количество тепла dQ_1 , введенное в элементарный объём извне за время $d\tau$ вследствие теплопроводности, а также от

внутренних источников, равно изменению внутренней энергии вещества, содержащегося в элементарном объёме:

$$dQ_1+dQ_2=dQ$$
, Дж, (1.17)

где dQ_1 – количество тепла, введенного в элементарный объём путем теплопроводности за время $d\tau$;

 dQ_2 — количество тепла, которое выделилось в элементарном объёме dV за счет внутренних источников;

dQ — изменение внутренней энергии вещества, содержащегося в элементарном объёме dV за время $d\tau$;

 dQ_{x1} , dQ_{y1} , dQ_{z1} — количество тепла, которое подводится к элементарному объёму в следствие теплопроводности в направлении осей x, y, z за время $d\tau$;

 dQ_{x2} , dQ_{y2} , dQ_{z2} — количество тепла, которое отводится от элементарного объёма в следствие теплопроводности в направлении осей x, y, z за время $d\tau$.

Предположим, что $dQ_{x1}>dQ_{x2}$. Тогда $dQ_{x}=dQ_{x1}-dQ_{x2}$, Дж.

Количество тепла, которое остается в теле при передаче тепла теплопроводностью в направлении оси x за время $d\tau$

$$dQ_{x_1} = q_x dF \cdot d\tau; dF = dy dz.$$

Введем понятие градиент теплового потока $\frac{\partial q_x}{\partial x}$, то есть изменение теплового потока на единицу длины. Градиент теплового потока направлен в сторону возрастания теплового потока. Если на левой грани удельный тепловой поток q_x , то на правой он будет отличаться на величину $\frac{\partial q_x}{\partial x} dx$ (изменение на

единицу длины $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ и длина dx). Тогда

$$\begin{split} dQ_{x_2} &= (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dF d\tau; \\ dQ_x &= q_x dF d\tau - (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dF d\tau. \end{split}$$

Проведя аналогичные рассуждения вдоль осей y, z, можно записать

$$dQ_{y} = -\frac{\partial q_{y}}{\partial y} dy dx dz d\tau;$$

$$dQ_z = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dz dy dx d\tau.$$

Количество тепла, которое получит элементарный объём вследствие теплопроводности в направлении трёх осей

$$dQ_1 = dQ_x + dQ_y + dQ_z = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dv d\tau.$$

Определим dQ_2 . Обозначим удельную производительность внутренних источников тепла через q_v , $\mathrm{Bt/m}^3$. Удельная производительность внутренних источников называется также объемной плотностью тепловыделения.

Объёмная плотность тепловыделения — это количество тепла, которое выделяется в единице объёма вещества в единицу времени.

Тогда $dQ_2 = q_v dv d\tau$.

Третья составляющая, характеризующая изменение внутренней энергии

$$dQ = c_{p} \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dv d\tau.$$

Подставляя, получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{1}{c_{p}\rho} \left(\frac{\partial q_{x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{z}}{\partial z} \right) + \frac{q_{v}}{c\rho};$$

$$q_{x} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \ q_{y} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \ q_{z} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c_p \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c \rho}. \quad (1.18)$$

Чем больше падение теплового потока, тем выше скорость падения температуры

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c_p \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) \right];$$
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial q_x}{\partial x}.$$

Чем больше теплоёмкость, тем меньше скорость падения температуры.

При постоянном коэффициенте теплопроводности λ =const

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c \rho}, \tag{1.19}$$

где c – удельная теплоёмкость Дж/(кг·К);

 ρ – плотность кг/м³;

 λ – коэффициент теплопроводности Bt/(м·K).

Величина $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ называется коэффициентом температуро-

проводности; размерность коэффициента температуропроводности ${\rm m}^2/{\rm c}$.

Если принять, что внутренние источники тепла отсутствуют q_v =0, дифференциальное уравнение запишется:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

ИЛИ

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t \,. \tag{1.20}$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности устанавливает связь между временным и пространственным изменением температуры или энтальпии в любой точке тела, в котором происходит процесс теплопроводности.

Коэффициент температуропроводности $a=\lambda/(c\cdot\rho)$ является физическим параметром вещества. Он существен ДЛЯ нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры, является мерой теплоинерционных свойств тела. Изменение температуры во времени $\partial t/\partial \tau$ времени $\partial i/\partial \tau$ ДЛЯ любой энтальпии точки BO тела пропорционально величине T.e. скорость aизменения температуры или энтальпии в любой точке будет тем больше, чем больше коэффициент температуропроводности. Поэтому при прочих равных условиях выравнивание температур во всех точках пространства будет происходить быстрее в том теле, которое обладает большим коэффициентом температуропроводности. Величина коэффициента температуропроводности зависит от природы вещества. Например, жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью и, следовательно, коэффициентом температуропроводности. малым Металлы обладают малой тепловой инерционностью, потому что они имеют большой коэффициент температуропроводности.

Условия однозначности. Дифференциальное уравнение теплопроводности выведено на основе общих законов физики и описывает явление теплопроводности в самом общем виде. дифференциальное уравнение Любое бесконечное имеет решений. Чтобы из большого числа решений количество получить требуемое и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание частных особенностей всех рассматриваемого процесса. Эти частные особенности называют условиями однозначности или краевыми условиями.

Условия однозначности включают:

1. Геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела.

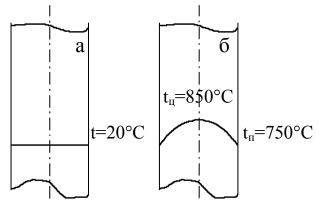


Рисунок 1.6 – Схема распределения температуры по сечению тела в начальный момент времени

- 2. Физические условия, характеризующие физические свойства среды и тела.
- 3. Начальные vcловия, характеризующие распределение температуобъему ры ПО тела в начальный момент времеt=f(x,y,z)НИ при $\tau=0$ (рисунок 1.6).

По разному будет протекать процесс распространения тепла

в теле, имеющем в начальный момент времени распределение температуры как показано на рисунке 1.7а и на рисунке 1.7б.

4. Граничные условия (ГУ), которые характеризуют изменения температуры на поверхности тела во времени в процессе нагрева или охлаждения или тепловое взаимодействие

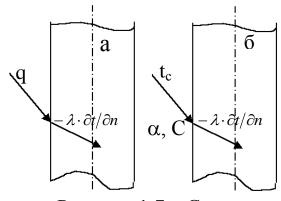


Рисунок 1.7 – Схема взаимодействия тела со средой

тела с окружающей средой. ГУ бывают нескольких родов.

Граничные условия 1 рода. При ГУ 1 рода задается закон изменения температуры поверхности тела во времени: $t_{\text{пов}} = f(x, y, z, \tau)$.

Граничные условия 2 рода. При ГУ 2 рода задается закон изменения теплового потока во времени, взаимодействующего с поверхностью тела, $q=f(x,y,z,\tau)$ (рисунок 1.7a).

Граничные условия 3 рода. При ГУ 3 рода задается температура среды $t_{cp} = f(x, y, z, \tau)$, как функция времени, и вид теплообмена между средой и телом. Передача тепла между двумя осуществляться либо конвекцией, может телами Плотность теплового потока, излучением. подводимого поверхности тела (рисунок 1.7а), равна плотности теплового ОТВОДИМОГО OT поверхности внутрь тела теплопроводностью $q=-\lambda\,\frac{\partial t}{\partial n}$. При ГУ 3 рода плотность теплового потока может быть определена при конвекции по закону Ньютона – Рихмана $q = \alpha (t_{cp} - t_n)$ или при излучении

$$q = C \left[\left(\frac{t_{cp} + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{t_n + 273}{100} \right)^4 \right]. \tag{1.21}$$

Если тепло передается одновременно конвекцией и излучением, тогда можно записать

$$\alpha \left(t_{cp} - t_n\right) + C \left[\left(\frac{t_{cp} + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{t_n + 273}{100}\right)^4 \right] = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}, \tag{1.22}$$

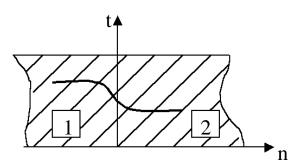


Рисунок 1.8 — Схема соприкосновения двух тел при граничных условиях 4 рода

где t_{Π} — температура поверхности тела, °C;

 $t_{\rm cp}$ – температура среды, °С.

Граничные условия 4 рода. При ГУ 4 рода предполагается, что между телами существует плотный контакт (в процессе прокатки металл и

прокатный валок находятся в плотном контакте между собой). В плоскости соприкосновения (рисунок 1.8)

$$t_{1c} = t_{2c}; \left(\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{1c} = \left(\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{2c}.$$
 (1.23)

1.8 Диффузионный поток

Первое уравнение диффузии. Диффузия (от латинского diffuzio - распространение, рассеивание) - движение частиц среды, приводящее к переносу вещества и к выравниванию концентраций или к установлению равновесного распределения концентраций частиц данного сорта в среде.

Диффузия в твердых телах происходит значительно медленнее, чем в жидкостях или, тем более, в газах. Поэтому изучать ее начали намного позже. Принято считать, что первый научный опыт по изучению диффузии в твердом состоянии английский металлург Роберт - Аустен, поставил в 1896г. именем которого назвали аустенит.

Основные уравнения диффузии были написаны раньше, в Фик считает, что диффузионный процесс Фиком. аналогичен процессу передачи тепла, и с математической точки зрения для него могут быть использованы те же уравнения, Фурье применял к проблемам теплопроводности. которые «Достаточно заменить в законе Фурье слова количество тепла количество растворенного словами вещества И слово температура словами концентрация раствора».

Если предположить, что распространение тепла и диффузия происходит только в направлении оси х, можно записать, что количество тепла dQ (количество растворенного вещества dg), которое проходит за время $d\tau$ через поверхность F, имея энтальпию i(x) (концентрацию c(x)), равно

$$dQ = -a\frac{\partial i}{\partial x} \cdot F \cdot d\tau$$

плотность теплового потока

$$q = -a(\partial i/\partial x)$$

ропроводности, M^2/c ;

$$dg = -D\frac{\partial c}{\partial x} \cdot F \cdot d\tau$$

плотность потока вещества

$$j = -D(\partial c/\partial x)$$

a — коэффициент температу- D — коэффициент диффузии, ропроводности, M^2/c ;

$$i$$
 — объёмная энтальпия, c — ко колич (моле q — плотность теплового потока, $BT/M^2 = \iint M/(M^2 \cdot c)$;

dQ – количество тепла, Дж.

- концентрация вещества, количество частиц $(молей)/м^3$;

- плотность потока вещества, количество частиц (молей)/(м 2 ·с);

dg — количество вещества, количество частиц (молей).

Коэффициент диффузии $D=D_0\exp(-E/(RT))$, (1.24) где D_0 – предэкспоненциальный множитель, м²/с;

E – энергия активации, Дж/моль;

R – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К);

R=8,314 Дж/(моль·К);

T – абсолютная температура, К.

Согласно 1 закону Фика плотность потока i-го вещества j_1 пропорциональна градиенту концентрации c_i этого вещества и направлена в сторону противоположную градиенту

$$j_i = -D_i \operatorname{grad} c_i,$$
 (1.25)

где $D_{\rm i}$ – коэффициент диффузии i-го компонента раствора.

1.9 Второе уравнение диффузии (2 уравнение Фика)

В отсутствие источников и стоков (химическая реакция, фазовое превращение, испарение и т.д.) можно считать, что количество диффундирующего вещества остается постоянным, вещество при диффузии только перераспределяется.

Второе уравнение Фика описывает изменение концентрации диффундирующего вещества в пространстве и во времени. Это уравнение непосредственно следует из баланса вещества при диффузии.

Для вывода дифференциального уравнения диффузии выделим в теле элементарный объем. Обозначим через dg_{x1} , dg_{y1} , dg_{z1} количество вещества, которое подводится в направлении осей x, y, z в результате диффузии за время $d\tau$, через dg_{x2} , dg_{y2} , dg_{z2} количество вещества, которое отводится от элементарного

объема в направлении осей x, y, z в результате диффузии за время $d\tau$ (рисунок 1.9). Рассмотрим перенос вещества в направлении

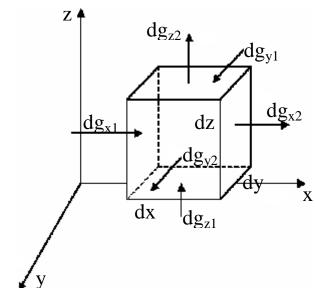


Рисунок 1.9 – К выводу 2 уравнения Фика

оси х. Предположим, ЧТО подводится вещества К элементарному объему в результате диффузии больше, чем отводится, т.е. $dg_{x1}>dg_{x2}$. В ЭТОМ случае имеем нестационарное состояние. Количество которое вещества, останется В

элементарном объеме при переносе его в направлении оси x в результате диффузии за время d au $dg_x = dg_{x1} - dg_{x2}$.

Предположим, что на левой грани элементарного объема концентрация равна c, тогда

$$dg_{x1} = -D\frac{\partial c}{\partial x}dydzd\tau$$
.

Градиент концентрации $\partial c/\partial x$ по физическому смыслу характеризует изменение концентрации на единицу длины; поскольку длина элементарного объема в направлении оси x равна dx, то концентрация на правой грани будет отличаться от концентрации на левой грани на величину $\frac{\partial c}{\partial x}dx$ и равняться

$$c + \frac{\partial c}{\partial x} dx$$
. Тогда

$$dg_{x2} = -D\frac{\partial}{\partial x} \left(c + \frac{\partial c}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau;$$

$$dg_{x2} = -D\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}dx\right)dydzd\tau.$$

Количество вещества, которое осталось в элементарном объеме при переносе его в направлении оси x

$$dg_{x} = D \frac{\partial^{2} c}{\partial x^{2}} dx dy dz d\tau.$$

Проведя аналогичные выкладки при распространении вещества в направлении осей у и z, получим

$$dg_{y} = D \frac{\partial^{2} c}{\partial y^{2}} dx dy dz d\tau; \quad dg_{z} = D \frac{\partial^{2} c}{\partial z^{2}} dx dy dz d\tau.$$

Количество вещества, которое останется в элементарном объеме при переносе его в направлении осей x, y, z в результате диффузии за время $d\tau$, равно

$$dg = dg_x + dg_y + dg_z ag{1.26}$$

$$dg = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) dx dy dz d\tau.$$
 (1.27)

Это количество вещества приведет к изменению в элементарном объеме концентрации диффундирующего вещества

$$dg = dc \cdot dV = \frac{\partial c}{\partial \tau} d\tau dx dy dz.$$

Приравнивая, получим

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} dx dy dz d\tau = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) dx dy dz d\tau.$$

Окончательное выражение дифференциального уравнения диффузии имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right), \tag{1.28}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} -$ оператор Лапласа.

Тогда
$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D\nabla^2 c$$
.

Полученное уравнение описывает изменение концентрации во времени и по координатам x, y, z.

Если рассматривать изменение концентрации в направлении только одной оси, например x, то второе уравнение Фика будет иметь вид

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$
 (1.29)

Для цилиндра, если изменение концентрации происходит только по радиусу и не зависит от угла поворота и высоты цилиндра, уравнение запишется $\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \bigg(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} \bigg).$

Для шара при изменении концентрации вещества только по радиусу

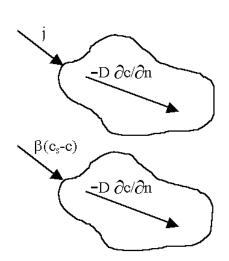
$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} \right). \tag{1.30}$$

Тогда для тел простой геометрической формы (плита, цилиндр, шар), когда изменение концентрации осуществляется в направлении координаты r, второе уравнение диффузии запишется

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right), \tag{1.31}$$

где m=0 – плита; m=1 – цилиндр; m=2 – шар.

Условия однозначности. Для решения второго уравнения диффузии необходимо сформулировать условия однозначности, которым должна удовлетворять концентрация диффундирующего



вещества. Эти условия определяют на основе анализа обстановки, в которой происходит процесс диффузии.

Условия однозначности включают:

- 1. Геометрические условия, характеризующие размеры и форму тела, в котором исследуются диффузионные процессы.
- 2. Физические условия, характеризующие физические свойства

тела и среды.

3. Начальные условия: при начальных условиях задается распределение концентрации вещества по объему тела в начальный момент времени, т.е. при τ =0 c=f(x,y,z).

4. Граничные условия:

граничные условия 1 *рода*: при граничных условиях 1 рода задается закон изменения во времени концентрации вещества на поверхности тела $c=f(x,y,z,\tau)$;

граничные условия 2 рода: при граничных условиях 2 рода задается закон изменения во времени плотности потока вещества $j=f(x,y,z,\tau)$, поступающего к поверхности тела;

граничные условия 3 рода: при граничных условиях 3 рода задается закон изменения во времени концентрации среды $c_S = f(x,y,z,\tau)$ и коэффициента массоотдачи β , м/с между телом и средой.

1.10 Решение 2-го уравнения диффузии (2-го уравнения Фика)

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных существуют аналитические и численные методы.

Достоинство аналитических методов состоит в том, что решение уравнения можно получить в аналитическом виде. Правда, решить дифференциальное уравнение в аналитическом виде можно при введении ряда допущений, таких как, например, постоянная концентрация в теле в начальный момент времени, симметричные граничные условия по поверхности тела и ряд других.

В настоящее время широкое распространение получили численные методы. Численные методы позволяют решать задачи с произвольным распределением концентрации по телу в начальный момент времени, иметь несимметричные граничные условия на поверхностях тела, решать задачу при действии на одной поверхности граничных условий одного рода, а на другой поверхности граничных условий другого рода, учитывать зависимость коэффициента диффузии от температуры и др.

Недостатком численных методов является невозможность получения решения в виде аналитических зависимостей.

1.11 Некоторые аналитические методы решения 2-го уравнения Фика

Для решения дифференциального уравнения используют:

- метод Фурье или метод разделения переменных;
- операционный метод;
- метод источников;
- решение в виде функции ошибок.

При решении задачи методом источников концентрация вещества является пропорциональной выражению

$$c \sim u = \tau^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D\tau}\right). \tag{1.32}$$

Решение в виде функции ошибок:

$$c \sim erf\left(\frac{x}{2\sqrt{D\tau}}\right)$$
 или $c \sim erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D\tau}}\right) = 1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{D\tau}}\right)$.

Функцию ошибок Гаусса (встречаются также термины интеграл вероятности, функция Крампа) - error function определяют следующим образом $erfz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z \exp\left(-\xi^2\right) \! d\xi$.

Если erf z является решением второго уравнения диффузии, то и A·erfz (A – произвольная постоянная) также удовлетворяет уравнению. Справедливы следующие соотношения

erf
$$(0) = 0$$
; erf $(\infty) = 1$; erf $(-z) = -$ erf (z) .

В таблице 1.1 приведены значения функции ошибок.

Решения в виде функции ошибок чаще всего используют в задачах диффузии в неограниченное и полуограниченное тело через поверхность, на которой выдерживается постоянная концентрация.

$x/(2\sqrt{D\tau})$	$erf(x/2\sqrt{D\tau})$	$x/(2\sqrt{D\tau})$	$erf(x/2\sqrt{D\tau})$
0	0	0,7	0,678
0,05	0,056	0,8	0,742
0,10	0,112	0,9	0,797
0,15	0,168	1,0	0,843
0,20	0,223	1,2	0,910
0,25	0,276	1,4	0,952
0,30	0,329	1,6	0,976
0,35	0,379	1,8	0,989
0,40	0,428	2,0	0,995
0,45	0,475	2,5	0,999
0,50	0,521	∞	1,000
0,60	0,604		

Таблица 1.1 – Значения функции ошибок Гаусса.

Рассмотрим некоторые частные случаи решения второго уравнения Фика для одномерной задачи при постоянном коэффициенте диффузии.

1. Диффузия в неограниченном образце $(-\infty < x < \infty)$ с нулевой начальной концентрацией

$$c(x,0)=0.$$

1.1. Из бесконечно тонкого слоя (мгновенный источник мощностью q, частиц(молей)/м², в точке x_0). Концентрация c частиц (молей)/м³, в зависимости от времени определяется:

$$c(x,\tau) = \frac{q}{2\sqrt{\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{\left(x - x_0\right)^2}{4D\tau}\right). \tag{1.33}$$

В частном случае, если x_0 =0

$$c(x,\tau) = \frac{q}{2\sqrt{\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D\tau}\right). \tag{1.34}$$

Изменение концентрации от координаты для различных

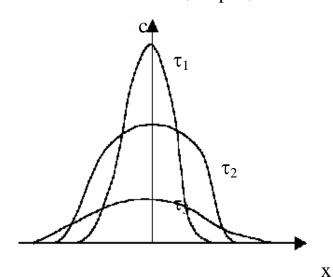


Рисунок 1.10 — Концентрационные кривые для диффузии из бесконечно тонкого слоя в неограниченный образец

моментов времени приведено на рисунке Концен-1.10. трационные кривые приведены ДЛЯ времени τ_{l} , τ_2 u $(\tau_1 < \tau_2 < \tau_3)$. С увеличевремени нием концентрационные кривые расплываются. Площадь под кривой в каждый момент вресоответствует мени мощности источника.

1.2. Из слоя конечной толщины (-a < x < a), содержащего в начальный момент диффундирующее вещество с постоянной концентрацией c_0 (при |x| > a c = 0 при $\tau = 0$) (рисунок 1.11).

Решение имеет вид

$$c(x,\tau) = \frac{c_0}{2} \left[erf \frac{a-x}{2\sqrt{D\tau}} + erf \frac{a+x}{2\sqrt{D\tau}} \right]. \tag{1.35}$$

2. Диффузия в полуограниченный образец $(0 < x < \infty)$ с

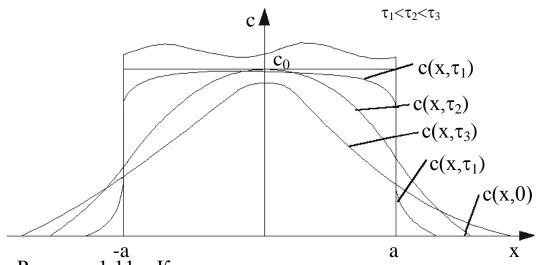


Рисунок 1.11 – Концентрационные кривые для неограниченного образца, если в слое конечной толщины поддерживается постоянная концентрация

нулевой начальной концентрацией c(x,0)=0.

2.1. Из другого полуограниченного образца ($-\infty < x < 0$) с

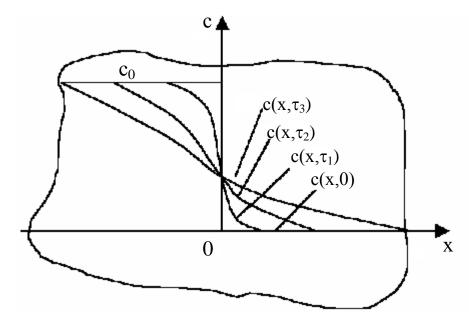


Рисунок 1.12 – Концентрационные кривые для полуограниченных образцов ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$)

начальной концентрацией c_0 (рисунок 1.12).

Зависимость концентрации от координаты и времени

$$c(x,\tau) = \frac{c_0}{2} \left(1 - erf \frac{x}{2\sqrt{D\tau}} \right). \tag{1.36}$$

2.2. Через поверхность (x=0), на которой поддерживается постоянная концентрация c_0 , не зависящая от времени $c(0,\tau)=c_0$ (рисунок 1.13). Концентрация вещества выражается зависимостью

$$c(x,\tau) = c_0 \left(1 - erf \frac{x}{2\sqrt{D\tau}} \right). \tag{1.37}$$

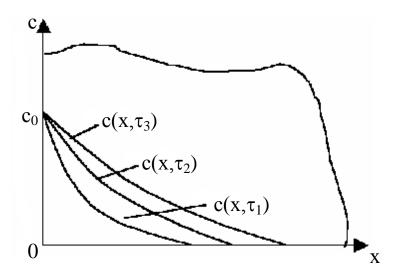


Рисунок 1.13 – Концентрационные кривые для полуограниченных образцов при постоянной концентрации c_0 на поверхности x=0 ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$)

Обратной этой является задача диффузии из полуограниченного образца с начальной концентрацией c_0 через поверхность x=0 в среду, не содержащую диффундирующего вещества, с нулевой концентрацией на поверхности $c(0,\tau)$ =0:

$$c(x,\tau) = c_0 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{D\tau}}.$$
 (1.38)

3. Диффузия в полуограниченный образец $(0 < x < \infty)$ с начальной концентрацией $c_{\text{исх}}$ через поверхность x=0, на которой поддерживается постоянная концентрация c_0 , не зависящая от

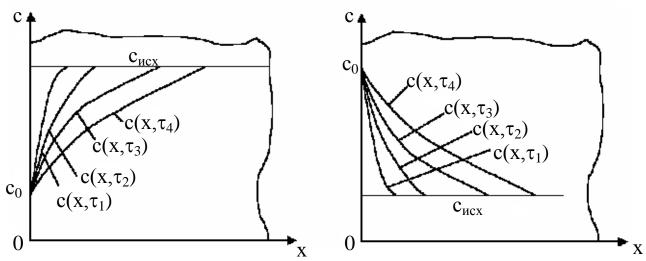


Рисунок 1.14 — Концентрационные кривые для полуограниченных образцов при начальной концентрации в образце c_{uex} ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$)

времени (рисунок 1.14).

Изменение концентрации описывается следующей зависимостью

$$\frac{c_0 - c(x, \tau)}{c_0 - c_{ycx}} = erf \frac{x}{2\sqrt{D\tau}}.$$
 (1.38)

4. Диффузия в образце конечных размеров (0 < x < l).

В этом случае решение получается в виде ряда (экспонент — для пластины и шара, функций Бесселя - для цилиндра), который сходится медленно, если $D \cdot \tau << l^2$.

В пластину (0,l) с нулевой начальной концентрацией и постоянной концентрацией c_0 на концах (рисунок 1.15):

$$\frac{c(x,\tau)}{c_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D \tau}{l^2}\right] \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$
 (1.39)

Аналогичное решение получается, если вещество уходит из пластины, имеющей постоянную начальную концентрацию, через границы x=0 и x=l, на которых поддерживается нулевая концентрация (рисунок 1.16).

$$\frac{c(x,\tau)}{c_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D \tau}{l^2}\right] \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$
 (1.40)

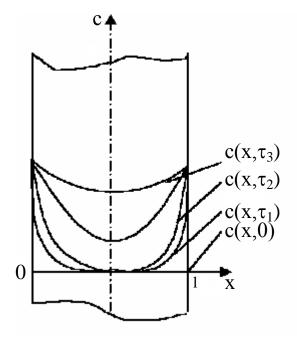


Рисунок 1.15 – Концентрационные кривые при диффузии в пластину

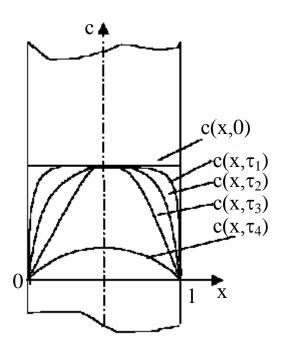


Рисунок 1.16 – Концентрационные кривые при диффузии из пластины

При $\tau \ge 0.05 \frac{l^2}{D}$ слагаемые ряда, начиная со второго, пренебрежительно малы по сравнению с первым и можно воспользоваться только первым членом ряда.

1.12 Численный метод решения дифференциального уравнения диффузии

Дифференциальное уравнение диффузии для одномерного температурного поля запишем в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} \right).$$

Для простоты выкладок примем, что m=0, тогда

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}.$$

При численном методе толщина тела разделяется на *п* плоскостей (рисунок 1.17) и производные

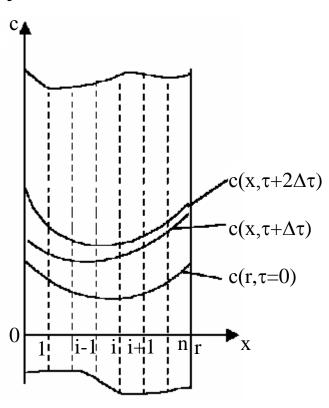


Рисунок 1.17 – Схема разбиения тела плоскостями

заменяются конечными разностями. Производная по координате определяется по значениям концентрации в различных точках в один и тот же момент времени

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{c_{i+1}^{\tau} - c_{i}^{\tau}}{\Delta r}; \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{c_{i}^{\tau} - c_{i-1}^{\tau}}{\Delta r}; \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{c_{i+1}^{\tau} - c_{i}^{\tau}}{\Delta r};$$

Производная по времени определяется по значениям концентрации вещества в одной и той же точке, но в разные моменты времени

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{c_i^{\tau + \Delta \tau} - c_i^{\tau}}{\Delta \tau}; \frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{c_{i-1}^{\tau + \Delta \tau} - c_{i-1}^{\tau}}{\Delta \tau}.$$
 (1.41)

Применение численных методов дает возможность решать задачи с произвольными граничными условиями и произвольным распределением концентрации вещества в начальный момент времени.

Как уже отмечалось выше, численным методам присущи следующие недостатки:

- при численном методе нельзя получить решение задачи в аналитическом виде;
 - требуется выполнить большой объем вычислений.

Современное состояние вычислительной техники позволяет легко реализовать численные методы и быстро получить искомые результаты.

1.13 Конечно-разностный метод

1.13.1 Определение концентрации вещества во внутренних точках тела

Составим баланс вещества для i-го элементарного объема (рисунок 1.18) с поперечным сечением F. Количество вещества, подведенное в элементарный объем за время $d\tau$, равно изменению концентрации этого объема.

К элементарному объему через плоскость на расстоянии $r_i - \Delta r_{i-1}/2$ подводится количество вещества: $g_1 = j_{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}} \cdot F \cdot d\tau$, а

через плоскость на расстоянии $r_i + \Delta r_i/2$ отводится количество вещества: $g_2 = j_{r_i + \frac{\Delta r_{i-1}}{2}} \cdot F \cdot d\tau$.

Количество вещества, которое осталось в элементарном объеме

$$\Delta g = g_1 - g_2 = \left(j_{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}} - j_{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}} \right) \cdot F \cdot d\tau.$$
 (1.42)

Это количество вещества приведет к изменению концентрации вещества в элементарном объеме $\partial c/\partial \tau \, d\tau \, dV$, т.е.

$$\left(j_{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}} - j_{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}}\right) F d\tau = \frac{\partial c}{\partial \tau} d\tau dV, \qquad (1.43)$$

где

$$j_{r_{i}-\frac{\Delta r_{i-1}}{2}} = -D\frac{\partial c}{\partial r} = -D\frac{c_{i}^{\tau+\Delta\tau} - c_{i-1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r_{i-1}} \quad ; \tag{1.44}$$

$$j_{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}} = -D \frac{\partial c}{\partial r} = -D \frac{c_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} - c_i^{\tau + \Delta \tau}}{\Delta r_i} \quad . \tag{1.45}$$

Тогда

$$j_{r_{i} - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}} - j_{r_{i} + \frac{\Delta r_{i}}{2}} = -D \frac{c_{i}^{\tau + \Delta \tau} - c_{i-1}^{\tau + \Delta \tau}}{\Delta r_{i-1}} - \left[-D \frac{c_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} - c_{i}^{\tau + \Delta \tau}}{\Delta r_{i}} \right]; \quad (1.46)$$

Производную $\partial c/\partial \tau$ заменим на конечную разность

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{c_i^{\tau + \Delta \tau} - c_i^{\tau}}{\Delta \tau} \tag{1.47}$$

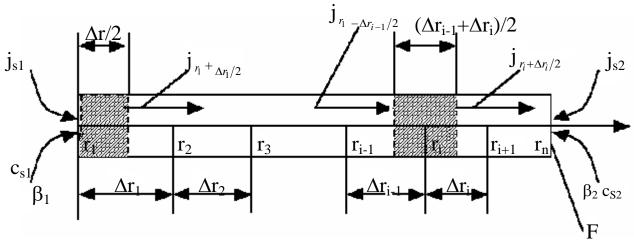


Рисунок 1.18 – К определению концентраций по сечению тела

объем

$$dV = \frac{\Delta r_{i-1} + \Delta r_i}{2} \cdot F \cdot$$

Тогда

$$\left(-D\frac{c_{i}^{\tau+\Delta\tau}-c_{i-1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r_{i-1}}+D\frac{c_{i+1}^{\tau+\Delta\tau}-c_{i}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r_{i}}\right)Fd\tau =
=\frac{c_{i}^{\tau+\Delta\tau}-c_{i}^{\tau}}{\Delta \tau}\cdot d\tau \cdot \frac{\Delta r_{i-1}+\Delta r_{i}}{2}\cdot F.$$
(1.48)

Уравнение (1.48) позволяет получить значения концентрации в точках i=2, 3, ..., n-1, т.е. во всех точках тела за исключением граничных точек при произвольном шаге по координате.

Примем равномерный шаг по координате $\Delta r_1 = \Delta r_2 = ... = \Delta r_i = \Delta r$ и, умножив уравнение (1.48) на величину $\Delta r/D$, получим (1.49):

$$c_{i-1}^{\tau+\Delta\tau} - \left(2 + \frac{\Delta r^2}{D\Delta\tau}\right) c_i^{\tau+\Delta\tau} + c_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} = -\frac{\Delta r^2}{D\Delta\tau} c_i^{\tau}, \quad i = 1, 2, 3, ..., n-1.$$

ИЛИ

$$A_{i}C_{i-1}^{\tau+\Delta\tau} - G_{i}^{*}C_{i}^{\tau+\Delta\tau} + B_{i}C_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} = -F_{i}$$

где
$$A_i=1$$
; $G_i*=2+\Delta r^2/(D\Delta \tau)$; $B_i=1$; $F_i=\Delta r^2/(D\Delta \tau)\cdot c^{\tau}_i$.

В том случае, если исследуется изменение концентрации вещества в цилиндре или шаре

$$A_i = 1 - \frac{m \cdot \Delta r}{2r}$$
; $B_i = 1 + \frac{m \cdot \Delta r}{2r}$.

где r — текущая координата $r = \Delta r(i-1)$, тогда

$$A_i = 1 - \frac{m}{2(i-1)}$$
; $B_i = 1 + \frac{m}{2(i-1)}$.

1.13.2 Определение концентрации вещества в граничных

Составим уравнение баланса для элементарного объема, выделенного на левой границе (рисунок 1.18). Обозначим количество вещества, которое подводится к элементарному объему через g_1 , а которое отводится через g_2 .

Количество вещества, которое подводится к элементарному объему

$$g_1 = \left[j_{S1}^{\tau + \Delta \tau} + \beta_1 \left(c_{S1}^{\tau + \Delta \tau} - c_1^{\tau + \Delta \tau}\right)\right] F d\tau, \tag{1.50}$$

где $j_{\rm s1}$ – плотность потока вещества, поступающего к поверхности тела, количество частиц (молей)/(M^2 ·с);

 $c_{\rm s1}$ – концентрация среды на левой границе, количество частиц (молей)/м³;

 β_1 — коэффициент массоотдачи на левой границе, м/с.

Количество вещества, которое отводится от элементарного объема

$$g_2 = j_{r_1 + \frac{\Delta r_1}{2}} F d\tau,$$
 (1.51)

где

$$j_{r_1 + \frac{\Delta r_1}{2}} = j_{r_1 + \frac{\Delta r}{2}} = -D\frac{\partial c}{\partial r} = -D\frac{c_2^{\tau + \Delta \tau} - c_1^{\tau + \Delta \tau}}{\Delta r}.$$
 (1.52)

Количество вещества, оставшееся в теле, приводит изменению концентрации вещества,

$$\Delta g = \frac{\partial c}{\partial \tau} d\tau dV,$$

(1.54)

 $\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{c_1^{\tau + \Delta \tau} - c_1^{\tau}}{\Delta \tau} \; ; \quad dV = \frac{\Delta r}{2} \cdot F \; .$

тогда

$$\begin{split} \left[j_{S1}^{\tau+\Delta\tau} + \beta_1 \left(c_{S1}^{\tau+\Delta\tau} - c_1^{\tau+\Delta\tau}\right)\right] F d\tau - \left(-D \frac{c_2^{\tau+\Delta\tau} - c_1^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r}\right) F d\tau = \\ &= \frac{c_1^{\tau+\Delta\tau} - c_1^{\tau}}{\Delta \tau} d\tau \frac{\Delta r}{2} F. \end{split}$$

После преобразования получим

$$\left[j_{S1}^{\tau+\Delta\tau}+\beta_{1}\left(c_{S1}^{\tau+\Delta\tau}-c_{1}^{\tau+\Delta\tau}\right)\right]+D\frac{c_{2}^{\tau+\Delta\tau}-c_{1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r}=\frac{c_{1}^{\tau+\Delta\tau}-c_{1}^{\tau}}{\Delta\tau}\cdot\frac{\Delta r}{2}.$$

Умножив полученное уравнение на величину $\Delta r/D$, получим

$$c_{1}^{\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_{1}\Delta r}{D} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta\tau}} c_{2}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{1}{1 + \frac{\beta_{1}\Delta r}{D} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta\tau}} \left(\frac{\Delta r}{D} j_{S1}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{\beta_{1}\Delta r}{D} c_{S1}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta\tau} c_{1}^{\tau} \right).$$
(1.55)

Проведя аналогичные выводы, получим значения концентрации вещества на другой границе

$$c_{n}^{\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_{2}\Delta r}{D} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta\tau}} c_{n-1}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{1}{1 + \frac{\beta_{2}\Delta r}{D} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta\tau}} \left(\frac{\Delta r}{D} j_{S2}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{\beta_{2}\Delta r}{D} c_{S2}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta\tau} c_{n}^{\tau} \right).$$
(1.56)

Обозначив

$$\chi_{1} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_{1}\Delta r}{D} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta \tau}} ; \quad \chi_{2} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_{2}\Delta r}{D} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta \tau}} .$$

$$v_{1} = \chi_{1} \left(\frac{\Delta r}{D} j_{S1}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\beta_{1}\Delta r}{D} c_{S1}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta \tau} c_{1}^{\tau} \right);$$

$$v_{2} = \chi_{2} \left(\frac{\Delta r}{D} j_{S2}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\beta_{2}\Delta r}{D} c_{S2}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\Delta r^{2}}{2D\Delta \tau} c_{n}^{\tau} \right),$$

получим

$$c_1^{\tau+\Delta\tau} = \chi_1 c_2^{\tau+\Delta\tau} + v_1 \tag{1.57}$$

$$c_n^{\tau + \Delta \tau} = \chi_2 c_{n-1}^{\tau + \Delta \tau} + \nu_2. \tag{1.58}$$

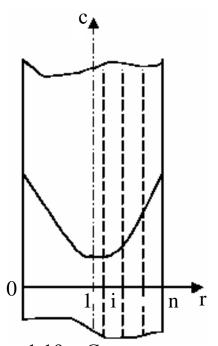


Рисунок 1.19 — Схема разделения тела плоскостями при симметричных условиях

Если на одной и другой границах тела действуют граничные условия одного и того же рода и одинаковые по величине, тогда задача будет симметричная относительно

геометрической середины тела. В этом случае нет необходимости определять концентрацию по всей толщине тела. Достаточно рассчитать концентрацию для половины тела (рисунок 1.19). Для τογο, чтобы решить такую задачу нужно

определить граничные условия на оси тела. При симметричной задаче на оси тела плотность потока вещества будет равна нулю j=0, т.е. тангенс угла наклона касательной к кривой на оси будет равен нулю

$$j = -D\frac{\partial c}{\partial \tau} = 0; -D\frac{c_2^{\tau + \Delta \tau} - c_1^{\tau + \Delta \tau}}{\Delta r} = 0$$
 откуда $c_1 = c_2$. (1.59)

Сравнивая между собой уравнения (5) и (7), находим, что c_1 =1; v_1 =0.

1.13.3 Метод прогонки

Уравнение

$$A_{i}c_{i-1}^{\tau+\Delta\tau} - G_{i}^{*}c_{i}^{\tau+\Delta\tau} + B_{i}c_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} = -F_{i}$$
 (1.60)

называют трехточечным разностным уравнением. Для решения уравнения (8) используют метод прогонки.

Решение разностного уравнения (1.60) будем искать в таком же виде, как заданы граничные условия (1.57) и (1.58)

$$c_i^{\tau+\Delta\tau} = \alpha_{i+1}c_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} + \beta_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1$$
 (1.61)

где α и β – пока неизвестные прогоночные коэффициенты.

По аналогии с уравнением (1.61) концентрацию в плоскости i-1 можно записать

$$c_{i-1}^{\tau+\Delta\tau} = \alpha_i c_i^{\tau+\Delta\tau} + \beta_i. \tag{1.62}$$

Подставим выражения (1.61) и (1.62) в уравнение (1.60):

$$\begin{split} A_i \Big[\alpha_i \Big(\alpha_{i+1} c_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} + \beta_{i+1} \Big) + \beta_i \Big] - G_i^* \Big(\alpha_{i+1} c_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} + \beta_{i+1} \Big) + B_i c_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} + F_i &= 0. \\ \Big[\Big(A_i \alpha_i - G_i^* \Big) \alpha_{i+1} + B_i \Big] c_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} + \Big(A_i \alpha_i - G_i^* \Big) \beta_{i+1} + A_i \beta_i + F_i &= 0. \end{split}$$

Это уравнение будет справедливо, если

$$(A_i \alpha_i - G_i^*) \alpha_{i+1} + B_i = 0$$
 и $(A_i \alpha_i - G_i^*) \beta_{i+1} + A \beta_i + F_i = 0$.

Откуда получим

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{G_i^* - A_i \alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{G_i^* - A_i \alpha_i}, \quad i = 2, 3, ..., n-1.$$

Прогоночные коэффициенты α_2 и β_2 , необходимые для начала счета, получим, сравнивая уравнения (1.57) и (1.61) при i=1.

$$c_1^{\tau+\Delta\tau} = \chi_1 c_2^{\tau+\Delta\tau} + \nu_1; \quad c_1^{\tau+\Delta\tau} = \alpha_2 c_2^{\tau+\Delta\tau} + \beta_2;$$

откуда $\alpha_2 = \chi_1$, $\beta_2 = \nu_1$.

Определяем прогоночные коэффициенты α_i и β_i (i=2, 3, ..., n-I).

Используя граничные условия на другой границе, определим концентрацию вещества в плоскости n. Для этого сравним уравнения (1.58) и (1.61) при i=n-1:

$$c_n^{\tau+\Delta\tau} = \chi_2 c_{n-1}^{\tau+\Delta\tau} + \nu_2 \qquad c_{n-1}^{\tau+\Delta\tau} = \alpha_n c_n^{\tau+\Delta\tau} + \beta_n .$$

Решив систему уравнений, получим

$$c_n^{\tau+\Delta\tau} = \frac{\chi_2 \beta_n + \nu_2}{1 - \chi_2 \alpha_n}.$$

В остальных плоскостях по толщине тела концентрация вещества находится из выражения:

$$c_i^{\tau+\Delta\tau} = \alpha_{i+1}c_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} + \beta_{i+1}$$

где i=n-1, n-2,..., 1.

2 КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

При конвекции процесс переноса тепла неразрывно связан с переносом самой среды. Поэтому конвекция возможна лишь в жидкостях и газах, частицы которых легко могут перемещаться и осуществляется перемещением в пространстве неравномерно нагретых объемов жидкости или газов.

Обычно при инженерных расчетах определяется конвективный теплообмен между жидкостью и твердой стенкой, называемый теплоотдачей. Согласно закону Ньютона—Рихмана тепловой поток Q^* , Вт, от жидкости к стенке пропорционален поверхности теплообмена и разности температур между температурой жидкости $t_{\rm x}$ и температурой твердой стенки $t_{\rm c}$

$$Q^* = a(t_{yc} - t_c)F. (2.1)$$

Однако необходимо иметь В виду, ЧТО конвективным переносом тепла в жидкости всегда имеет место теплопроводность. Конвективный теплообмен отличается теплопроводности ЧТО переносчиками тем, энергии являются не только микроструктурные элементы вещества электроны), (молекулы, атомы, а также макроскопические объемы жидкости или газа, размеры которых значительно свободного пробега молекул длину амплитуды колебаний молекул в жидкости.

различных видов переноса (теплопроводностью, конвекцией и излучением), которые в осуществляются большинстве случаев одновременно, конвективный перенос во многих случаях имеет решающее значение. В природе конвекцией тепло переносится в атмосфере земли, в водных пространствах океанов и морей и так далее. В технике конвективный перенос осуществляется при передачи тепла в различных технологических реакторах, в котлах и печах, различных теплообменных аппаратах, холодильных В устройствах, при отоплении зданий.

Коэффициент теплоотдачи можно характеризовать как количество тепла, отдаваемое в единицу времени единицей поверхности при разности температур между жидкостью (газом) и поверхностью, равной одному градусу

$$\alpha = \frac{Q^*}{F(t_{con} - t_c)}, \frac{BT}{M^2 \cdot K}, \qquad (2.2)$$

где F – поверхность теплообмена, M^2 ;

 $t_{\text{ж}}$ – температура жидкости, °С;

 $t_{\rm c}$ – температура стенки, °С.

Простота формулы только кажущаяся, т.к. она не отражает действительной зависимости теплового потока от температуры, физических свойств и размеров тела. По существу, вычисление по этим формулам представляет некоторый формальный прием, переносящий трудности расчета все на определение коэффициента теплоотдачи который обычно α, является функцией многих переменных.

В общем случае коэффициент теплоотдачи является функцией физических параметров жидкости, скорости движения жидкости, формы и размеров тела и др.

$$\alpha = f(w, \lambda, c, \rho, \mu, t_{sc}, t_c, X, \Phi, l_1, l_2, l_3, \ldots),$$

где w — скорость движения жидкости;

 λ , c, ρ , μ – физические параметры жидкости;

 $t_{\rm w}, t_{\rm c},$ – температуры жидкости и стенки;

X – характер движения жидкости (свободное или вынужденное);

 Φ – форма стенки;

 $l_1, l_2, l_3,$ – размеры поверхности.

По природе возникновения различают вынужденную и свободную конвекцию. При вынужденной конвекции жидкость или газ движутся за счет работы вспомогательных источников движения (насоса, вентилятора и т. д.).

При свободной конвекции движение жидкости осуществляется за счет разности плотностей нагретых холодных слоёв жидкости. Свободное движение возможно в том случае, когда жидкость находится в поле массовых сил. Вся теплообмена сложность конвективного заключается В определении коэффициента теплоотдачи.

2.1 Дифференциальные уравнения теплообмена

Изучить какое-либо явление — значит установить зависимость между величинами, характеризующими это явление. Для сложных явлений, в которых определяющие величины меняются во времени и пространстве, установить зависимость

между переменными очень трудно. В таких случаях, применяя общие законы физики, ограничиваются установлением связи между переменными (координатами, временем и физическими свойствами), которая охватывает небольшой промежуток времени и элементарный объём пространства. Полученная таким образом зависимость является общим дифференциальным уравнением рассматриваемого процесса.

Такие дифференциальные уравнения могут быть составлены для любого процесса и в частности для процесса теплоотдачи. Так как теплоотдача определяется не только тепловыми, но и гидродинамическими явлениями, то совокупность этих явлений описывается системой дифференциальных уравнений, в которую входят уравнения теплопроводности, уравнения движения и сплошности.

Уравнение теплопроводности.

Общее количество тепла, оставшееся в элементе объёма dxdydz за время $d\tau$, равно сумме этих трех выражений

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx dy dz d\tau.$$

Вследствие такого притока тепла температура элемента изменяется на величину $\frac{Dt}{\partial \tau} d\tau$, а энтальпия на величину

$$dQ = c_p \rho \frac{Dt}{\partial \tau} d\tau dx dy dz. \tag{2.3}$$

Полное изменение любой величины φ (давления, скорости, плотности, температуры) элемента движущейся жидкости является следствием двух явлений — изменения во времени и изменения вследствие перемещения элемента из одной точки пространства в другую.

На основании понятия о полной производной можно записать

1.
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau},$$
 (2.4)

где $dx/d\tau$, $dy/d\tau$, $dz/d\tau$ имеет смысл составляющих скорости w_x , w_y , w_z . Такую производную, связанную с движущейся материей или субстанцией называют субстанциональной производной и обозначают особым символом:

$$\frac{D\varphi}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + w_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + w_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + w_z \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

 $z\partial e \ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - npedcmaвляет собой локальное, a \ w_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + w_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

– конвективное изменение величины ф.

$$c_{p}\rho \frac{Dt}{d\tau}d\tau dxdydz = \lambda \left(\frac{\partial^{2}t}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}t}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}t}{\partial z^{2}}\right)dxdydzd\tau$$

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{c_{p}\rho} \left(\frac{\partial^{2}t}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}t}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}t}{\partial z^{2}}\right) = a\nabla^{2}t \qquad (2.5)$$

Так как

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z},$$

TO

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right).$$
 (a)

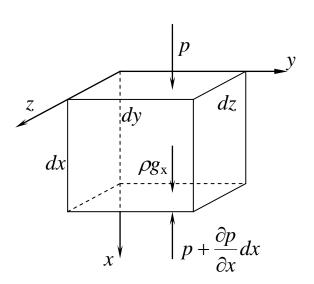


Рисунок 2.1 – Схема приложения сил

Уравнение движения. В уравнении (a) наряду с

температурой t имеются три переменные w_x , w_v , w_z . Это значит, что в движущейся жидкости температурное поле зависит И распределения скоростей. Последнее описывается дифференциальным уравнением движения, вывод которого основан на 2-м законе Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение.

Выделим в потоке движущейся жидкости элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz. На выделенный элемент действуют три силы: сила тяжести, равнодействующая сил давления и равнодействующая сил трения. Найдем проекции этих сил на ось x:

а) сила тяжести (рисунок 2.1) приложена в центре тяжести элемента объемом dv. Её проекция на ось x равна произведению

проекции ускорения свободного падения g_x на массу элемента ρdv , а именно

$$g_x \rho dv = g_x \rho dx dy dz;$$
 (6)

б) равнодействующая сил давления определяется на основе

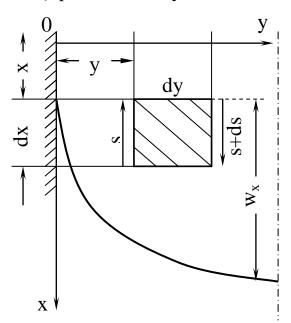


Рисунок 2.2 – Схема распределения сил трения

равна их алгебраической сумме.

следующих соотношений (рисунок 2.1). Если на верхней грани элемента давление равно p, то на площадку dydz действует сила pdydz. На нижней грани давление жидкости равно $p + \frac{dp}{dx}dx$ и на эту грань действует сила $-\left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)dydz$. Знак

«-» указывает на то, что сила действует против направления оси x.

Равнодействующая этих сил равна сумме

$$pdydz - \left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)dydz = -\frac{dp}{dx}dxdydz;$$
 (B)

в) равнодействующая сил трения. При движении жидкости всегда имеется сила трения. Выражение для этой силы проще всего может быть установлено из рассмотрения плоского ламинарного потока (рисунок 2.2), в котором w_x изменяется лишь в направлении оси y. В этом случае сила трения возникает лишь на боковых гранях элемента. Около левой грани скорость движения частиц меньше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении "y" сила трения направлена против движения и равна -sdxdz. Около правой грани элемента, наоборот, скорость движения частиц жидкости больше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении y+dy сила трения направлена в сторону движения и равна $\left(s+\frac{ds}{dy}dy\right)dxdz$. Равнодействующая этих сил

$$\left(s + \frac{ds}{dy}dy\right)dxdz - sdxdz = \frac{ds}{dy}dxdydz,$$

где s — касательная сила трения на единицу поверхности; согласно закону Ньютона

$$s = \mu \frac{dw_x}{dy}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее и принимая $\mu = const$, окончательно получим

$$\frac{ds}{dy}dv = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dv. \tag{\Gamma}$$

Однако такое сравнительно простое выражение получается лишь для одномерного движения. В общем же случае, когда $w_{\rm x}$ изменяется ПО трем направлениям, проекция всем равнодействующих СИЛ трения на ось \boldsymbol{x} определяется выражением

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) dv = \mu \nabla^2 w_x dv.$$

Суммируя выражения (б), (в), (г), получаем проекцию на ось x равнодействующей всех сил, приложенных к объёму dv

$$\left[\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)\right] dv. \tag{Д}$$

Согласно второму закону механики, эта равнодействующая равна произведению массы элемента ρdv на его ускорение $Dw_x/d\tau$

$$\rho \frac{Dw_x}{d\tau} dv = \rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) dv. \quad (e)$$

Приравнивая друг другу выражения (д) и (е) и произведя сокращения на dv, окончательно получим

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \cdot (2.6)$$

Все члены этого уравнения имеют размерность силы, отнесенной к единице объёма (H/m^3) .

Таким образом могут быть получены уравнения и для проекций равнодействующих сил на оси y и z, а именно:

$$\rho \frac{\partial w_{y}}{\partial \tau} + \rho \left(w_{x} \frac{\partial w_{y}}{\partial x} + w_{y} \frac{\partial w_{y}}{\partial y} + w_{z} \frac{\partial w_{y}}{\partial z} \right) = \rho g_{y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^{2} w_{y}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} w_{y}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} w_{y}}{\partial z^{2}} \right).$$

$$\rho \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + \rho \left(w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \cdot$$

Уравнение сплошности. Так как в уравнении движения появилась новая неизвестная — давление p, то число неизвестных в уравнениях (2.5) и (2.6) больше числа уравнений, то есть система оказалась незамкнутой. Чтобы получить замкнутую систему, необходимо к имеющимся уравнениям присоединить еще одно — уравнение сплошности, которое выводится на основе закона сохранения массы. Выделим в потоке движущейся жидкости элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz и подсчитаем массу жидкости, протекающей через него за момент времени $d\tau$ (рисунок 2.3).

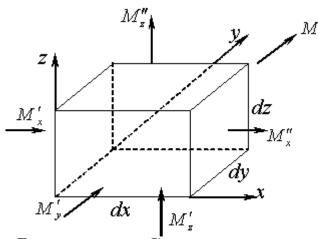


Рисунок **2.3** Схема переноса массы жидкости

В направлении оси х через левую грань втекает масса жидкости M_{\star}'

$$M'_{x} = \rho w_{x} dy dz d\tau$$
,

через противоположную грань вытекает M_x''

$$M_x'' = \left[\rho w_x + \frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dy dz d\tau.$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем изменение массы жид-

кости, вытекающей из объема в направлении оси x

Аналогичным образом для направлений по осям у и z имеем

$$dM_{y} = \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_{y}) dx dy dz d\tau,$$
$$dM_{z} = \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_{z}) dx dy dz d\tau.$$

Полный избыток массы вытекающей жидкости равен сумме этих выражений

$$dM = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) \right] dv d\tau.$$

Этот избыток обуславливается изменением плотности жидкости в объеме dv и равен изменению массы данного объема во времени. Следовательно

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z)\right] dv d\tau = -\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dv d\tau.$$

Производя сокращения и перенося все члены в левую часть этого равенства, окончательно получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} = 0.$$

Это и есть уравнение сплошности или непрерывности в самом общем виде. Для несжимаемых жидкостей плотность постоянна. В этом случае уравнение принимает более простой вид

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \tag{2.7}$$

2.2 Понятие о теории подобия и моделировании 2.2.1 Общие понятия

Конвективный теплообмен может быть описан системой дифференциальных уравнений. Решение задачи состоит в интегрировании системы дифференциальных уравнений при заданных условиях однозначности, что связано с математическими трудностями.

Достоинством аналитического пути решения является большая общность получаемых результатов. Но многие задачи решить аналитическим путем пока не представляется возможным.

Для каждого единичного явления задачу можно решить экспериментально. Но такой метод не всегда осуществим на обладает тем недостатком, ЧТО полученные И результаты справедливы только для изучаемого явления и не могут быть распространены на другие. Поэтому для получения практических результатов приходится искать исключающие необходимость чисто аналитического или чисто опытного решения задачи.

Такую возможность дает теория подобия. *Теория подобия* - это учение о подобии явлений. Впервые с понятием подобия встречаемся в геометрии. Как известно, геометрически подобные фигуры обладают тем свойством, что их соответственные углы равны, а сходственные стороны пропорциональны (рисунок 2.4), т.е.

$$l_1'/l_1'' = l_2'/l_2'' = l_3'/l_3'' = C_l.$$

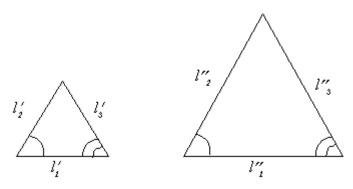


Рисунок 2.4 – К подобию геометрических фигур

Понятие подобия может быть распространено на любые физические явления. Физические явления считаются подобными, если они относятся к одному и тому же классу, протекают в геометрически подобных системах и, если подобны все однородные физические величины, характеризующие эти явления.

Рассмотрим подобные явления на примере (рисунок 2.5).

По трубам движутся жидкости с различными теплофизическими свойствами

$$\mu \neq \mu'$$
, $a \neq a'$, $\rho \neq \rho'$.

Если явления подобны, то:

- трубы геометрически подобны

$$\frac{d}{d'} = \frac{L}{L'} = C_{\ell};$$

 подобны поля теплофизических свойств, т.е. для любой пары сходственных точек выполняются условия

$$\frac{\mu_a}{\mu'_a} = \frac{\mu_b}{\mu'_b} = C_\mu \qquad \qquad \frac{\rho_a}{\rho'_a} = \frac{\rho_b}{\rho'_b} = C_\rho$$

Сходственными точками геометрически подобных систем называются такие, координаты которых удовлетворяют условию

$$x_a = C_l \cdot x'_a$$
; $x_b = C_l \cdot x'_b$.

- подобны поля зависимых переменных t, w, p

$$\frac{t_a}{t'_a} = \frac{t_b}{t'_b} = C_t; \quad \frac{w_a}{w'_a} = \frac{w_b}{w'_b} = C_w; \quad \frac{p_a}{p'_a} = \frac{p_b}{p'_b} = C_p.$$

Это значит, что подобны и эпюры этих величин в сходственных точках.

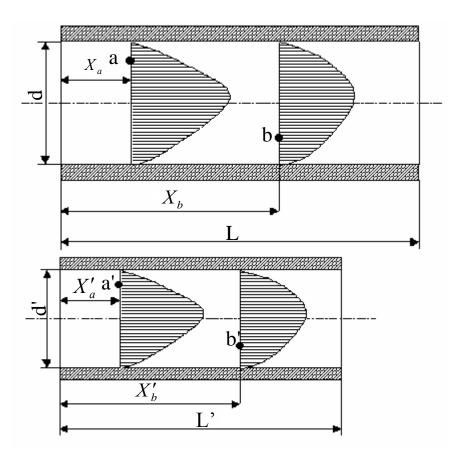


Рисунок 2.5 – Пример подобных явлений

Постоянные $C_{\rm l}$, $C_{\rm w}$, $C_{\rm t}$, $C_{\rm p}$, $C_{\rm m}$, $C_{\rm r}$ и т.д. называют константами подобия. При подобии сложных процессов константы подобия находятся явлений между собой определенных соотношениях. Такие соотношения между константами подобия, как и сами константы, являются безразмерными и представляют комплексы, составленные из величин, существенных для данного процесса. Они называются критериями или числами подобия. Числа подобия принято ученых, плодотворно именами работавших называть соответствующей области науки.

Числа подобия получаются из аналитических зависимостей, описывающих данный процесс. Если получено частное решение для одного из подобных явлений, то зная величины чисел подобия, можно путем пересчета получить решения для целой

группы явлений, подобных первому. Когда интегрирование исходных дифференциальных уравнений затруднительно, необходимые закономерности можно установить экспериментально.

Числа подобия являются безразмерными комплексами, составленными из величин, характеризующих явление.

Теория подобия на определенном этапе обращается к эксперименту: искомую закономерность находят опытным путем для одного явления или, как говорят, для модели, а потом обрабатывают результаты в таком виде, чтобы их легко было пересчитать для любого другого явления, подобного модельному.

Основные положения теории подобия можно сформулировать в виде трёх теорем.

Имеется три теоремы подобия:

- 1. Подобные между собой явления имеют одинаковые числа подобия.
- **2.** Решение дифференциального уравнения может быть представлено в виде функциональной зависимости между числами подобия, характеризующими процесс и полученными из исходного уравнения

$$f(k_1, k_2,..., k_n)=0.$$

3. Подобны те явления, у которых условия однозначности подобны и определяющие числа подобия равны.

Определяющими называются числа подобия, составленные только из величин, входящих в условия однозначности. Числа подобия, содержащие зависимые переменные, называются определяемыми.

Определяющей температурой называется температура, по которой определяются значения физических свойств среды, входящих в числа подобия. Определяющий размер — это характерный линейный размер l_0 , которым определяется развитие процесса. Так, например, при движении жидкости по каналу определяющим линейным размером является внутренний диаметр трубы для каналов круглого сечения, для каналов некруглого сечения - эквивалентный диаметр d_3 =4 F/Π , где F — площадь поперечного сечения канала, Π — смоченный периметр канала.

Однако всегда нужно помнить, что общего решения теория подобия не дает; она позволяет лишь обобщить опытные данные

в области, ограниченной условиями подобия. Поэтому результаты отдельного опыта закономерно распространять только на подобные между собой явления и процессы.

Рассмотрим некоторые числа подобия.

Число подобия *Рейнольдса* характеризует соотношение сил инерции и внутреннего трения (вязкости) при вынужденном движении среды

$$Re = \frac{w \cdot l_0}{v}.$$
 (2.8)

Число подобия *Прандтля* характеризует влияние физических свойств среды на конвективный теплообмен

$$\Pr = \frac{v}{a}.\tag{2.9}$$

Число подобия *Грасгофа* характеризует соотношение сил инерции и тяжести (подъемной силы) в условиях отсутствия вынужденного движения

$$Gr = \frac{g \cdot l_0^3}{v^2} \beta \cdot \Delta t. \tag{2.10}$$

Число *Нуссельта* характеризует интенсивность процесса конвективного теплообмена. Оно характеризует теплообмен на границе «стенка-жидкость».

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda},\tag{2.11}$$

где l_0 – характерный линейный размер, м;

w – скорость движения жидкости, м/с;

 ν – кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{c}$;

a – коэффициент температуропроводности жидкости (газа), м²/с;

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho}; \tag{2.12}$$

g – ускорение силы тяжести, м/ c^2 ;

 β – коэффициент объемного расширения, 1/К.

Для идеального газа коэффициент объемного расширения.

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_c + 273};$$
(2.13)

 Δt — характерный температурный напор;

 α – коэффициент теплоотдачи, Bт/(м²·K);

 λ – коэффициент теплопроводности жидкости (газа), Bт/(м·К).

Кинематический коэффициент вязкости v характеризует ускорение частиц, вызванное силами вязкости.

Число подобия Пекле

$$Pe = \text{Re} \cdot \text{Pr} = \frac{wl_o}{v} \cdot \frac{v}{a};$$
 (2.14)

$$Pe = \frac{w \cdot l_o}{a},\tag{2.15}$$

числитель характеризует тепло, переносимое конвекцией, а знаменатель – тепло, переносимое теплопроводностью.

Число подобия Стантона

$$St = \frac{Nu}{Pe} = \frac{\alpha l_o / \lambda}{w l_o / a} = \frac{\alpha \cdot a}{w \cdot \lambda} = \frac{\alpha}{w c_n \rho}.$$
 (2.16)

Число подобия Релея

$$Ra = Gr \Pr = \frac{gl_0^3 \Delta t \cdot \beta}{v^2} \cdot \frac{v}{a} = g\beta \Delta t \frac{l_0^3}{va}. \tag{2.17}$$

Число подобия Фурье

$$Fo = \frac{a\tau}{l_0^2}. (2.18)$$

Для нестационарных процессов иногда вместо чисел подобия Fo применяется иное число подобия, называемое числом гомохронности

$$Ho = Fo \cdot Pe = \frac{a\tau}{l_0^2} \cdot \frac{wl_0}{a}; \qquad (2.19)$$

$$Ho = \frac{w \cdot \tau}{l_0}. (2.20)$$

Для решения ряда сложных научно-технических задач в настоящее время широкое распространение получил метод моделирования, который основан на теории подобия. Это обусловлено тем, что решение многих задач, в том числе и металлургических, в натурных условиях по ряду причин (непрозрачность и высокая температура металла, громоздкость и дороговизна установки, агрессивность свойств расплавленного металла и т. д.) весьма затруднено. Моделирование же позволяет значительно проще и полнее, чем в натуре, исследовать процесс

на модели и, обобщив результаты единичного опыта, распространить их на группу явлений, подобных исследуемому.

Таким образом, теория подобия позволяет на основании несложного анализа дифференциальных уравнений и условий однозначности получить некоторые результаты и выводы, не прибегая к процедуре интегрирования уравнений. Эти уравнения к настоящему времени аналитически не решены. Однако метод моделирования, основанный на определении чисел подобия процесса, совершенно не зависит от степени сложности уравнений, так как при этом не возникает необходимости их решения.

Далее, в данном разделе на основании анализа уравнений движения и тепломассопереноса сделана попытка более детально систематизировать основные числа подобия, имеющие место, например, при исследовании процессов затвердевания слитков и отливок.

2.2.2 Гидродинамическое подобие

Моделирование процессов переноса импульса требует геометрического, кинематического и динамического подобия. Это значит, что модель и натура должны быть подобными, безразмерные поля скоростей в рассматриваемых потоках – одинаковыми, дифференциальные уравнения движения и краевые условия также должны быть подобными.

Для выяснения условий динамического подобия необходимо систему уравнений движения и краевые условия к ней записать в безразмерном виде.

Рассмотрим случай движения несжимаемой жидкости при отсутствии электромагнитных полей, но при наличии массовой силы тяжести $\vec{f} = \vec{q}$. Тогда движение жидкости описывается уравнением Навье-Стокса. С учетом принятых условий имеем:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta \vec{U} + g\vec{e}_g \qquad (2..21)$$

где \vec{e}_{g} — единичный вектор направления ускорения свободного падения.

Введем следующие безразмерные переменные величины: скорость $\vec{V} = \vec{U}/u_0$; координаты $x = X/x_0$, $y = Y/x_0$, $z = Z/x_0$; давление $\Pi = p/P_0$; время или динамическое число Фурье (число гомохронности) $Fo_v = tv/x_0^2$, где u_0 , x_0 , P_0 — масштабы соответственно скорости, координаты, давления. Введем также безразмерные операторы:

$$\overset{\circ}{\nabla} = x_0 \nabla ; \quad \overset{\circ}{div} = x_0 div ; \quad grad = x_0 grad ; \quad \overset{\circ}{\Delta} = x_0^2 \Delta .$$

Подставляя, принятые безразмерные величины и операторы в уравнение (2.23), получаем после несложных преобразований уравнения Стокса и неразрывности в безразмерной (критериальной) форме:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + \text{Re}\left(\vec{V} \stackrel{0}{\nabla}\right) \vec{V} = -Eu \,\text{Re} \stackrel{0}{\nabla} \Pi + \stackrel{0}{\Delta} \vec{V} + \frac{\text{Re}}{Fr} \vec{e}_g \,; \tag{2.22}$$

$$\overset{\circ}{\Delta \vec{V}} = 0.$$
(2.23)

Таким образом, для подобия двух потоков при одинаковых краевых условиях, записанных в безразмерной форме, требуется, чтобы безразмерные комплексы уравнения (2.22) были одинаковы по величине

Re =
$$idem$$
; $Eu = idem$; $Fr = idem$; $Fo_v = idem$, (2.24)

где Re = $u_0 x_0 / \nu$ — число Рейнольдса; $Eu = P_0 / \rho u_0^2$ — число Эйлера; $Fr = u_0^2 / g x_0$ — число Фруда.

Как было обозначено выше, число Re, являющееся критерием режима течения среды в незамкнутых объемах, характеризует отношение сил инерции к силам вязкости. Число Eu представляет собой отношение потенциальной энергии к кинетической энергии потока, число гравитационного подобия Fr — отношение сил инерции к силам тяжести, а динамическое число Fo_{ν} — отношение сил вязкости к локальной составляющей сил инерции.

Если безразмерное время определить как t/t_0 , то после преобразования уравнения (2.21) к безразмерной форме в первом слагаемом левой части получим безразмерную величину

 $Sh = x_0/t_0 u_0$. Она называется числом Струхаля и характеризует отношение локальной составляющей сил инерции к конвективной. Аналогично числу Fo_{ν} число Sh характеризует нестационарность движения.

2.2.3 Тепловое подобие

Выясним условия теплового подобия на примере уравнения теплопереноса, записанного для несжимаемой двухкомпонентной жидкости при отсутствии химической реакции $(W_1 = 0)$ и электрического тока в ней (i = 0):

$$\rho c_{p} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U}\vec{\nabla})T \right] = div(\lambda gradT) + \eta Diss\vec{U}$$
(2.25)

Введем дополнительно безразмерные переменные $\Theta = (T - T_{\text{max}}) / (T_{\text{max}} - T_{\text{min}}),$ температура величины: ИЛИ тепловое число Фурье $Fo = at/x_0^2$, коэффициент теплопроводности $\ell = \lambda / \lambda_0$, где T_{\min} — максимальная и минимальная $T_{\rm max}$ И температуры, достигаемые в какой-либо точке потока; λ_0 масштаб коэффициента теплопроводности. Подставляя принятые безразмерные величины в уравнение (2.25), получим:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \frac{u_0 x_0}{a} \left(\vec{V} \nabla^0 \right) \theta = \operatorname{div} \left(\ell \operatorname{grad} \theta \right) + \frac{u_0^2 v}{c_P \left(T_{\text{max}} - T_{\text{min}} \right) a} \operatorname{Diss} \vec{V}$$
(2.26)

Очевидно, что для подобия тепловых процессов необходимо соблюдать равенство чисел: числа Пекле

$$Pe_T = u_0 x_0 / a$$
, (2.27)

выражающего отношение количеств тепла, переносимых конвективным и молекулярным путем; числа Прандтля, явно содержащего лишь определяющие физические свойства среды величины

$$Pr = v/a, (2.28)$$

и характеризующего отношение скоростных и температурных полей в потоке: числа Эккерта

$$Ek = \frac{u_0^2}{c_P (T_{\text{max}} - T_{\text{min}})},$$
(2.29)

выражающего отношение кинетической энергии и тепловой энергии потока;

 $Fo = at/x_0^2$ — число Фурье, характеризует нестационарность процесса теплопереноса.

C учетом обозначений (2.27) — (2.29) уравнение (2.26) примет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial F_0} + Pe\left(\vec{V} \stackrel{0}{\nabla}\right) \Theta = \stackrel{0}{div} \left(\ell \operatorname{grad}\Theta\right) + \operatorname{Pr} Ek \operatorname{Diss}\vec{V}$$
(2.30)

Для выполнения теплового подобия одинаковыми должны быть также начальные и граничные условия, записанные в безразмерном виде. Если на границе тела с окружающей средой задается ЛГУ–3, то в безразмерном виде оно запишется так:

$$-\left(\vec{n}\overset{0}{\nabla}\theta\right)\Big|_{\Gamma} = Bi\left(\theta - \theta_{cp}\right)\Big|_{\Gamma},\tag{2.31}$$

где θ_{cp} — безразмерная температура среды; \vec{n} — безразмерная нормаль к поверхности тела;

$$Bi = \alpha x_0 / \lambda \tag{2.32}$$

- число Био, которое представляет собой отношение параметров, интенсивность характеризующих внешнего И внутреннего отношение внутреннего сопротивления теплообмена или наружному. Поэтому чем больше величина Ві, тем больше интенсивность внешнего теплообмена сравнению ПО интенсивностью внутреннего. В качестве λ используется коэффициент теплопроводности материала стенки, контактирует с окружающей средой.

Если речь идет о расчете теплового потока от поверхности обтекаемого жидкостью (газом) тела — то условие, записанное в безразмерном виде, позволяет получить число Нуссельта:

$$Nu = \alpha x_0 / \lambda_{cn}, \qquad (2.33)$$

где λ_{cp} — коэффициент теплопроводности жидкости (газа). Число характеризует соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности тела и кондуктивным (молекулярным) через слой жидкости толщиной x_0 . Числа Bi и Nu по структуре сходны, однако отличие состоит в том, что в последнее входит коэффициент теплопроводности жидкости (газа), а не твердого тела. Физический смысл у них также различный.

По существу, число *Nu* представляет собой безразмерный коэффициент теплоотдачи (или теплопередачи). Зная его, можно рассчитать для данного тела поток тепла от его поверхности. Например, при продольном обтекании ламинарным потоком пластины.

$$Nu = 0.322 Pr^{1/3} Re^{1/2}. (2.34)$$

В общем случае число Nu — функция чисел Pr и Re.

При теплообмене тела с окружающей средой излучение необходимо привлекать нелинейное граничное условие, которое в безразмерной форме имеет вид:

$$-\left(\vec{n}\overset{0}{\nabla}\theta\right)\Big|_{\Gamma} = Sk\left(\theta - \theta_{cp}\right)\Big|_{\Gamma},\tag{2.35}$$

где Sk — число Старка,

$$Sk = \frac{x_0 \mathcal{E}_{\pi} \sigma}{\lambda} \left(T_{\Gamma}^2 + T_{cp}^2 \right) \left(T_{\Gamma} - T_{cp} \right), \tag{2.36}$$

имеющее физический смысл, аналогичный критерию Био.

Решение задач теплопереноса в затвердевающем расплаве требует рассмотрения специальных граничных условий СГУ-1 на подвижной границе, которые в безразмерном виде запишем следующим образом:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial \theta}{\partial n} \bigg|_{\Gamma_{*+0}} - \frac{\partial \theta}{\partial n} \bigg|_{\Gamma_{*-0}} = K \frac{d\varepsilon}{dFo}, \qquad (2.37)$$

где $d\varepsilon/dFo$ — безразмерная скорость продвижения фронта кристаллизации; Γ_* — граница раздела фаз, на которой $T_* = 0.5 \left(T_{_{\it Л}} + T_{_{\it C}}\right)$; $T_{_{\it Л}}$ и $T_{_{\it C}}$ — температуры ликвидус и солидус расплава; критерий кристаллизации

$$K = \frac{L}{c_P \left(T^0 - T_c\right)},\tag{2.38}$$

представляющий собой отношение скрытой теплоты фазового превращения к затратам тепла на нагрев тела от температуры солидус T_c до начальной температуры расплава T^0 .

Таким образом, для выполнения теплового подобия необходимо дополнительно обеспечить также равенства чисел Bi, Nu, Sk и K в натуре и на модели.

2.2.4 Диффузионное подобие

Методика получения чисел подобия для диффузионных процессов такая же, как для процессов переноса импульса и тепла. Приведем уравнение к безразмерному виду:

$$\frac{\partial S}{\partial F_{O}} + Pe_{\mathcal{A}} \left(\vec{V} \stackrel{0}{\nabla} \right) S = \stackrel{0}{\Delta} S , \qquad (2.39)$$

где $S = C/C_0$ — безразмерная концентрация; C_0 — масштаб концентрации, например, начальное содержание примеси в расплаве; $Fo_{\mathcal{I}}$ — безразмерное время, или число Фурье диффузионное,

$$Fo_{\pi} = tD/x_0^2;$$
 (2.40)

 Pe_{II} – диффузионное число Пекле,

$$Pe_{\mathcal{I}} = u_0 x_0 / D,$$
 (2.41)

выражающее отношение количеств вещества, переносимых конвективным и молекулярным путем.

 характеризует структуру потока. При $Pe_{_{\!\mathcal{I}}}>>1$ конвективный перенос вещества превалирует над кондуктивным, а при $Pe_{_{\!\mathcal{I}}}<<1$, наоборот.

Если в качестве безразмерного времени выбрать тепловое число Фурье Fo, то уравнение массопереноса в критериальной форме запишется так:

$$\frac{\partial S}{\partial Fo} + Pe\left(\vec{V}\nabla^{0}\right)S = Lu\Delta^{0}S, \qquad (2.42)$$

где *Lu* – число Льюиса,

$$Lu = D/a, (2.43)$$

содержащее лишь величины, определяющие физические свойства среды и характеризующие соотношение полей концентрации и температуры. Поэтому при Lu=1 эти поля будут подобными.

$$Sm = Pe_{I}/Re = v/D, \qquad (2.44)$$

характеризующее соотношение между полями скорости и концентрации. Для газов величина $Sm \approx 1$, для воды и подобных ей жидкостей $Sm \approx 10^3$, для расплавов, включая жидкие металлы и шлаки, число $Sm \approx 10^2 + 10^4$.

Решение конкретных задач массопереноса требует привлечения граничных условий. При этом часто применяется ЛГУ–3, которое в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$-\frac{\partial S}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = Nu_{\mathcal{I}} \left(S - S_{cp} \right) \Big|_{\Gamma}, \tag{2.45}$$

где

$$Nu_{\mathcal{I}} = \beta x_0 / D, \qquad (2.46)$$

диффузионное число Нуссельта, представляющее собой безразмерный коэффициент массопередачи и позволяющее рассчитать поток вещества от поверхности обтекаемого тела.

На границе фазового перехода при затвердевании расплавов используется специальное граничное условие СГУ–2, которое в критериальной форме запишется так:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{D_1}{D_2} \frac{\partial S_1}{\partial n} \bigg|_{\Gamma_* + 0} - \frac{\partial S_2}{\partial n} \bigg|_{\Gamma_* - 0} = \frac{1}{Lu} S_2 \left(1 - k_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dFo}. \tag{2.47}$$

2.2.5 Подобие при естественной конвекции

Постановка задачи естественной конвекции. Существует практически обширный класс важных задач, разделение гидродинамическую, задачи на тепловую диффузионную части невозможно, и поэтому соответствующие уравнения переноса импульса, тепла и массы необходимо решать совместно. К таким задачам относятся, в частности, задачи, расчетом полей скорости, связанные температуры естественной термоконцентрационной концентрации при конвекции в затвердевающем бинарном расплаве, например Fe-C.

Естественная конвекция в жидкости вызывается наличием в последней градиентов температуры и концентрации и вследствие этого – различием плотности различных участков жидкости. Градиент концентрации обусловлен различной зависимостью примеси в твердой и жидкой фазах, что приводит к накоплению ее у границ затвердевания расплава и деформированию диффузионного слоя. Участки жидкости с различной плотностью, в свою очередь, по-разному взаимодействуют с гравитационным полем Земли, что приводит к более или менее интенсивному перемешиванию жидкости. Более плотные объемы жидкости имеют тенденцию опускаться, менее плотные – подниматься. Это перемешивание, в свою очередь, оказывает влияние на поля температуры и концентрации. Поэтому в общем случае при исследовании термоконцентрационной конвекции приходится решать совместно уравнения движения и тепломассопереноса.

Формулировку задачи о естественной конвекции удобно осуществлять для условий, когда сжимаемость жидкости несущественна. В этом случае весьма эффективным является приближение Буссинеска, сущность которого состоит в

следующем: изменения плотности жидкости вследствие градиентов температуры и концентрации представляются достаточно малыми и ими можно пренебречь в уравнениях тепломассопереноса, в уравнении движения эти изменения учитываются лишь в члене с подъемной архимедовой силой \vec{f} .

Вывод уравнения естественной конвекции, возникающей, например, при затвердевании бинарного расплава, целесообразно начать с упрощения уравнения состояния:

$$\rho = \rho(T, C, P). \tag{2.48}$$

Предполагая, что $\Delta T = T - T_C$, $\Delta C = C - C_0$, $\Delta P = P - P_0$, настолько малые, что вызываемые ими изменения плотности $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ малы по сравнению с ρ_0 , запишем уравнение (30) в виде ряда Тейлора:

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{C_0 P_0} \Delta T + \left(\frac{\partial \rho}{\partial C}\right)_{T_C P_0} \Delta C + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{T_C C_0} \Delta P + ..., \tag{2.49}$$

где $\rho_0 = \rho(T_C, C_0, P_0)$ — известная величина плотности. Учитывая, что изменения плотности из-за неоднородности давления малы по сравнению с изменениями, обусловленными неоднородностью температуры и концентрации, из уравнения (2.49) имеем:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \beta_T \Delta T - \beta_D \Delta C \right), \tag{2.50}$$

где $\beta_{\scriptscriptstyle T}$ и $\beta_{\scriptscriptstyle J}$ — тепловой и концентрационный коэффициенты объемного расширения,

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{C_0 P_0}; \quad \beta_{II} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{T_0 P_0}.$$
 (2.51)

Введя в вместо давления p некоторое приведенное давление \tilde{p} , отличающееся от p отсутствием аддитивной составляющей, пропорциональной гидростатическому давлению $\tilde{p} = p - \rho_0 |\vec{g}| Y$, уравнение движения с учетом (2.50) запишем в виде:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{p} + \nu\Delta\vec{U} - \beta_T\Delta T \cdot \vec{g} - \beta_{\mathcal{A}}\Delta C \cdot \vec{g}. \qquad (2.52)$$

Уравнение теплопереноса в соответствии с приближением Буссинеска и в пренебрежении диссипативным членом (так как скорости естественной конвекции обычно невелики) запишем так:

$$\rho_0 c_P \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{U} \nabla \right) T \right] = \lambda \Delta T, \qquad (2.53)$$

где λ — коэффициент теплопроводности среды (предполагается постоянной и определенной величиной).

Система уравнений (2.52) и (2.53) совместно с уравнениями неразрывности представляет собой полную систему уравнений для расчета полей скорости, давления, температуры, концентрации при естественной термоконцентрационной конвекции в среде, например, в бинарном затвердевающем расплаве.

<u>Критериальная</u> форма записи уравнений термоконцентрационной конвекции. Переходя размерных величин к безразмерным в соответствии с приведенными раннее выражениями и используя критериальные обозначения соответствующих комбинаций физических величин, систему уравнений для термоконцентрационной конвекции запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + Pe \left(\vec{V} \stackrel{0}{\nabla} \right) \vec{V} = -EuPe \stackrel{0}{\nabla} \tilde{\Pi} + \Pr \stackrel{0}{\Delta} \vec{V} - \frac{Gr_T \Pr^2}{Pe} \theta \vec{e}_g - \frac{Gr_T \Pr^2}{Pe} (S - 1) \vec{e}_g$$
(2.54)

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe \left(\vec{V} \stackrel{0}{\nabla} \right) \theta = \stackrel{0}{\Delta} \theta ; \qquad (2.55)$$

$$\frac{\partial S}{\partial Fo} + Pe\left(\vec{V} \stackrel{0}{\nabla}\right) S = Lu \stackrel{0}{\Delta} S; \qquad (2.56)$$

$$\overset{\scriptscriptstyle{0}}{\nabla}\vec{V}=0\,,\tag{2.57}$$

где

$$Gr_T = \frac{x_0^3}{v^2} g \beta_T \Delta T , \qquad (2.58)$$

 тепловое число Грасгофа, характеризующее отношение подъемной силы, обусловленной изменением плотности жидкости вследствие изменения температуры, к силам вязкости;

$$Gr_{\mathcal{I}} = \frac{x_0^3}{v^2} g \beta_{\mathcal{I}} C_0,$$
 (2.59)

– диффузионное число Грасгофа, характеризующее отношение подъемной силы, обусловленной изменением плотности за счет изменения концентрации примеси в жидкости, к силам вязкости.

Если в жидкости имеются частички (например, для твердой фазы в затвердевающем расплаве) с удельным весом, отличным от удельного веса среды, то критерием подобия будет динамическое число Грасгофа:

$$Gr_{\Gamma} = \frac{x_0^3}{v^2} g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho}.$$
 (2.60)

В литературе в ряде случаев числа Грасгофа Gr_T , $Gr_{\mathcal{I}}$ и $Gr_{\mathcal{I}}$ именуют тепловым Ar_T , диффузионным $Ar_{\mathcal{I}}$ и динамическим Ar_T числами Архимеда.

Таким образом, для подобия процессов переноса импульса, тепла и массы при естественной гравитационной конвекции должны быть одинаковыми не только числа Pe, Eu, Pr, Fo, Lu, но и числа Apxumega.

Практически для всех задач по естественной конвекции из физических соображений по существу не могут быть заранее заданы характерная скорость u_0 и характерное давление P_0 . Поэтому они определяются искусственно из соображений возможного упрощения системы уравнений (2.54)–(2.57). Полагая

$$Eu \text{Re} = 1, Pe = 1,$$
 (2.61)

получаем:

$$u_0 = a/x_0, \quad P_0 = \rho_0 av/x_0^2.$$
 (2.62)

С учетом условий (2.62) систему уравнений (2.54) – (2.56) запишем в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla}\right) \vec{V} = -\Pr^{0} \nabla \tilde{\Pi} + \Pr^{0} \Delta \vec{V} - Gr_{T} \Pr^{2} \theta \vec{e}_{g} - Gr_{\Pi} \Pr^{2} \left(S - 1\right) \vec{e}_{g}; \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \left(\vec{V} \stackrel{0}{\nabla}\right) \theta = \stackrel{0}{\Delta} \theta ; \qquad (2.64)$$

$$\frac{\partial S}{\partial Fo} + \left(\vec{V} \stackrel{0}{\nabla}\right) S = Lu \stackrel{0}{\Delta} S. \tag{2.65}$$

Такая запись уравнений имеет следующие преимущества. Во-первых, уравнение теплопереноса (2.64) теперь не содержит каких бы, то ни было параметров. Во-вторых, в том важном случае, когда движение можно считать достаточно медленным, в уравнении Навье – Стокса (2.63) можно отбросить инерционные члены:

$$\overset{0}{\nabla} \tilde{\pi} = \overset{0}{\Delta} \vec{V} - \left[\Pr Gr_T \theta + \Pr Gr_{\pi} (S - 1) \right] \vec{e}_g. \tag{2.66}$$

Уравнение (2.66) содержит только параметры Gr_T Рг и Gr_{J} Рг, которые могут быть названы тепловым и диффузионным числами Релея соответственно:

$$Ra_T = Gr_T \operatorname{Pr}; \quad Ra_{II} = Gr_{II} \operatorname{Pr}.$$
 (2.67)

Числа Релея и определяют интенсивность движения жидкости. Таким образом, при относительно небольших значениях величин Ra_T и $Ra_{\mathcal{I}}$, когда движение медленное, его характеристики не зависят от физических свойств жидкости и при одинаковых значениях Ra_T и $Ra_{\mathcal{I}}$ и одинаковых граничных условиях в безразмерной форме совершенно идентичны для малотеплопроводных ($\Pr >>1$) и высокотеплопроводных ($\Pr <<1$) жидкостей, например, для расплавленных металлов ($\Pr \approx 0,2$ для расплавленной стали и $\Pr \approx 0,02$ для расплавленного свинца.

В случае естественной конвекции при заданной конфигурации области исследования интенсивность теплоотдачи определяется функцией

$$Nu = f_1(Gr_T, Gr_{\mathcal{I}}, Pr, Lu). \tag{2.68}$$

При смешанной конвекции, обусловленной взаимодействием вынужденного и естественного течений, добавляется еще число Re, тогда

$$Nu = f_2(Gr_T, Gr_{\mathcal{I}}, Pr, Lu, Re). \tag{2.69}$$

Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что основными критериями, определяющими интенсивность естественной конвекции, являются числа Грасгофа. Чем больше их величина, тем больше сила, возмущающая жидкость и приводящая ее в движение. Поэтому при естественной конвекции переход от ламинарного течения к турбулентному определяется не числом Рейнольдса, не имеющим в этих условиях реального физического смысла, а числом Грасгофа. При достаточно больших значениях числа Грасгофа происходит переход к турбулентному режиму движения.

<u>Другие числа подобия</u>. Иногда числа Грасгофа (2.58) –(2.60) представляются в виде произведения чисел Галилея:

$$Ga = gx_0^3/v^2 (2.70)$$

и чисел $\bar{\rho} = \Delta \rho / \rho_0$ для тепловой, концентрационной и гравитационной конвекции соответственно:

$$\bar{\rho} = \beta_T \Delta T; \quad \bar{\rho}_{\mathcal{A}} = \beta_{\mathcal{A}} \Delta C; \quad \bar{\rho}_{\Gamma} = (\rho_1 - \rho_2) / \rho.$$
 (2.71)

Число Релея в общем случае может быть записано как произведение

$$Ra = Ar \operatorname{Pr} = Gr \operatorname{Pr}. \tag{2.72}$$

В ряде задач, например при истечении струи расплава, из сталеразливочного устройства, определяющая роль принадлежит силам поверхностного натяжения. От них зависит форма и устойчивость струи. В таких случаях особая роль отводится числу Вебера

$$We = \rho_0 u_0^2 x_0 / \sigma, (2.73)$$

представляющему отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения.

Для задач термокапиллярного эффекта, обусловленного градиентом поверхностного натяжения на свободной неизотермической поверхности, важное место отводится числу Марангони

$$Ma = \frac{\Delta T x_0}{a \nu \rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial T},\tag{2.74}$$

выражающему отношение термокапиллярной силы и вязкости.

пористой В Пористая среда. среде, насыщенной неизотермической жидкостью, тэжом возникнуть термофильтрационное течение. Отличительной особенностью уравнения фильтрационной конвекции от обычного уравнения конвекции (2.52) является то, что в него вместо ньютоновской трения входит сила сопротивления вязкого пропорциональная скорости:

$$\vec{f} = -\frac{\nu \rho_0}{k} \vec{U} \,. \tag{2.75}$$

Уравнение движения для термофильтрационного течения в пренебрежении нелинейными членами в ускорении (в связи с малостью величины скорости) в безразмерной форме может быть записано так:

$$\frac{1}{\varsigma} \frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} = -EuPe \overset{0}{\nabla} \tilde{\Pi} - \frac{Pr}{Da} \vec{V} + \frac{GrPr^2}{Pe} \theta \vec{e}_g, \qquad (2.76)$$

где $\varsigma = W/W_0$ – пористость среды, отношение объема ко всему объему макроточки W_0 ;

$$Da = k / x_0^2, (2.77)$$

 число Дарси, характеризующее интенсивность фильтрации жидкости в пористой среде.

2.3 Турбулентное и ламинарное движение

В зависимости от характера движения различают ламинарное (или слоистое) и турбулентное (или вихреобразное) движение жидкости и газов.

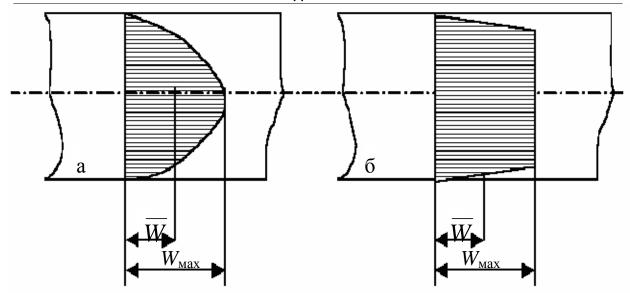


Рисунок 2.6 – Характер движения жидкости: а – ламинарный; б – турбулентный

При ламинарном режиме частицы жидкости (газа) движутся по плавным, непересекающимся траекториям.

Для ламинарного режима характерно параболическое распределение скоростей по сечению (рисунок 2.6a).

При турбулентном режиме в потоке возникает множество вихрей, что приводит к интенсивному перемешиванию жидкости (или газа). Для развитого турбулентного режима движения жидкости распределение скорости по сечению трубы имеет вид усеченной параболы (рисунок 2.6б).

При ламинарном режиме средняя скорость по сечению канала $\overline{W} = 0.5 W_{\text{max}}$, а при турбулентном режиме $\overline{W} \approx 0.76 W_{\text{max}}$.

Пределы существования ламинарного и турбулентного движения были установлены Рейнольдсом в 1883г., который показал, что характер движения зависит от соотношения сил инерции и сил внутреннего трения. Это соотношение характеризуется безразмерным комплексом.

$$Re = \frac{wd}{v}$$
.

Установлено, что ламинарное течение имеет место при малых значениях числа Рейнольдса, а турбулентное — при более высоких. Так для случая течения жидкости в круглых трубах при Re < 2000 поток ламинарен, при $Re > 10^4$ будет развитое турбулентное движение жидкости, течение при $Re = 2 \cdot 10^3 ... 10^4$ называют переходным.

Из выражения числа Рейнольдса следует, что турбулентности потока способствует увеличение скорости и диаметра канала и препятствует увеличение кинематической вязкости.

2.4 Конвекция при свободном движении

2.4.1 Теплоотдача при свободном движении в неограниченном пространстве

Свободной или естественной конвекцией называют перенос объемов жидкости или газа В результате движения, возникающего под действием силы тяжести при разности холодных частиц жидкости (газа). плотностей нагретых И Разность плотностей чаще возникает вследствие всего неравномерности температурного поля жидкости (газа).

Предположим, что температура стенки $t_{\rm C}$ выше температуры среда Холодная окружающей среды. (жидкость или соприкасаясь со стенкой, нагревается и начинает движение вверх вдоль стенки. Вначале толщина нагретого слоя жидкости (газа) мала и течение жидкости (газа) носит ламинарный характер Постепенно по высоте (рисунок 2.7). стенки движением увлекается все большее количество жидкости (газа), толщина При значительной ламинарного слоя растет. толщине

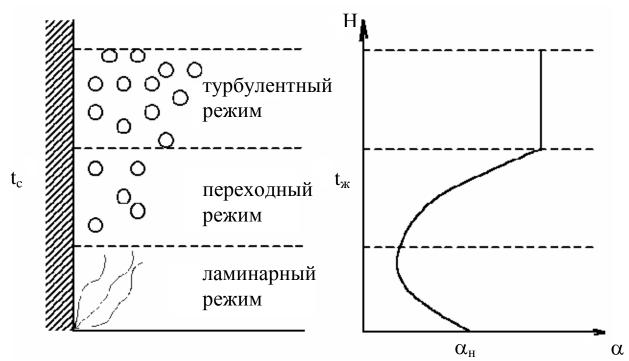


Рисунок 2.7 – Характер движения жидкости при свободном движении

ламинарный слой разрушается и наступает турбулентный режим течения. В области ламинарного режима течения коэффициент связи теплоотдачи уменьшается В cувеличением Движущийся движущейся жидкости. слой сопротивление для переноса тепла от горячей представляет стенки к окружающей среде. В области турбулентного движения коэффициент теплоотдачи резко возрастает. При наступлении турбулентного режима происходит перемешивание перемещение слоев. Нагретые у стенки слои жидкости могут переместиться к наружной границе движущегося слоя и тем самым увеличить отдачу тепла окружающей среде. При развитом турбулентном объемы движении жидкости интенсивно перемешиваются, объему ПО устанавливается постоянная коэффициент температура, теплоотдачи сохраняется постоянным. Температура жидкости изменяется от $t_{\rm c}$ до $t_{\rm w}$, а скорость от нуля у стенки, проходит через максимум и на большом удалении от стенки снова равна нулю.

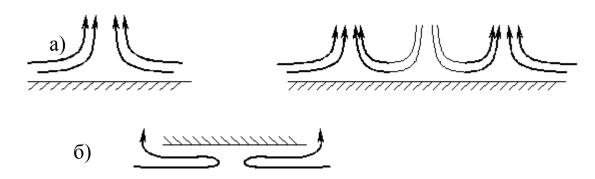


Рисунок 2.8 – Схема теплообмена горизонтальных поверхностей

В развитии свободного движения форма тела играет второстепенную роль. Здесь большее значение имеют протяженность поверхности, вдоль которой происходит движение, и её положение. Около нагретых горизонтальных поверхностей стенок или плит движение жидкости имеет иной характер и в сильной мере зависит от положения плиты и её размеров. Если нагретая поверхность обращена к верху (рисунок 2.8а) и плита имеет большие размеры, то вследствие наличия с краев сплошного потока нагретой жидкости центральная часть плиты оказывается изолированной. Её вентиляция происходит лишь за счет притока (провала) холодной жидкости сверху.

Если нагретая поверхность обращена вниз (рисунок 2.8б), то в этом случае движение происходит лишь в тонком слое под поверхностью.

По изучению интенсивности теплообмена в условиях свободного движения были проведены исследования с разными телами и различными жидкостями. В результате обобщения опытных данных получены критериальные зависимости для средних значений коэффициента теплоотдачи.

Критериальные уравнения для рассмотренных случев запишутся в виде

$$Nu = f(Pr, Gr)$$
.

Для сред с числом подобия $Pr \ge 0.5$ при расчете свободной конвекции можно пользоваться уравнением

$$Nu = c(\Pr Gr)^n$$
.

Коэффициенты c и n определяются из таблицы 2.1.

Таблица 2.1. – Значения коэффициентов с и п.

Расположение стенки	Pr∙Gr	C	n
Вертикальная	$10^{-2}5\cdot 10^2$	1,18	1/8
	$5.10^22.10^7$	0,54	1/4
	2.10^{7}	0,135	1/3
горизонтальная труба	10^310^9	0,5	0.25

Известно, что
$$Nu = \frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda}$$
, откуда $\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{l_0}$.

За характерный линейный размер принимается: для шара и горизонтальной трубы их диаметр, для вертикальной трубы и вертикальной пластины — высота участка теплообмена, для горизонтальной плиты (пластины) - ее наименьшая длина.

Коэффициент c для пластины, обращенной поверхностью теплообмена вверх, увеличивается на 30%, а для пластины, обращенной поверхностью теплообмена вниз, уменьшается на 30% по сравнению со значениями, приведенными в таблице 2.1.

Пример. Определить потерю тепла вертикальным неизолированным паропроводом диаметром 100мм и высотой h=4м, если температура наружной стенки t_c =170°C, а температура среды (воздуха) $t_{\text{ж}}$ =30°C. При $t_{\text{ж}}$ =30°C, $\lambda_{\text{ж}}$ =0,0267Bт/(м·К); $\nu_{\text{ж}}$ =16,0·10⁻⁶м²/c; \Pr_{w} =0,7; \Pr_{w} / \Pr_{c} =1.

$$Gr = geta\Delta t \cdot rac{l^3}{v^2}$$
; $Gr = geta\Delta t \cdot rac{h^3}{v^2}$.

Для идеального газа $\beta = rac{1}{T}$ $T=273+30=303$;
$$Gr = rac{9.81 \cdot \left(170-30\right) \cdot 4^3 \cdot 10^{12}}{303 \cdot 16^2} = 1,135 \cdot 10^{12}$$

$$Gr_{\infty} \cdot \Pr_{\infty} = 1,135 \cdot 10^{12} \cdot 0,7 = 8 \cdot 10^{11}$$

$$\operatorname{Nu}_{\mathbb{K}} = 0,135(8 \cdot 10^{11})^{0,33} = 0,135 \cdot 9,3 \cdot 10^3 = 1,25 \cdot 10^3; \quad Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}$$
:
$$\alpha = \frac{Nu_{\infty} \cdot \lambda_{\infty}}{h} = \frac{1,25 \cdot 10^3 \cdot 0,0267}{4} = 8,4 \, \operatorname{Bt/(M^2 \cdot K)}$$

$$Q=\alpha \cdot F(t_{\mathbb{C}} - t_{\mathbb{K}}) = 8,4 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 4 \cdot 140 = 1463 \, \operatorname{Bt.}$$

2.4.2 Пограничный слой при тепловой конвекции

Детально рассмотрим пограничный слой, образующийся при внесении в неподвижную среду с температурой T_{\min} некоторого тела с температурой T_{\max} (рис. 2.9).

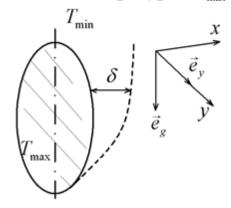


Рисунок 2.9 – Пограничный слой при естественной температурной конвекции

Наибольшие изменения скорости температуры имеют место в области динамического δ и теплового δ_{T} пограничных слоев. Толщины этих слоев значительно меньше характерного размера тела, т.е. выполняются следующие условия:

$$\delta <<1$$
; $\delta_T <<1$.

Уравнения тепловой конвекции при условии Re=1 в проекциях на оси координат (здесь вводится криволинейная система координат) запишем так:

$$\frac{1}{\Pr} \frac{\partial u}{\partial Fo} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gr \theta \sin(\vec{e}_g, \vec{e}_y); \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{\Pr} \frac{\partial v}{\partial Fo} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Gr \theta \cos(\vec{e}_g, \vec{e}_y); \tag{2.79}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \Pr\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(l\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(l\frac{\partial \theta}{\partial y}\right);\tag{2.80}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (2.81)$$

где \vec{e}_{g} и \vec{e}_{y} - единичные орты, имеющие направление вектора ускорения свободного падения \vec{g} и оси Oy соответственно.

При записи системы уравнения (2.78-2.81) кривизной координатной сетки в пределах пограничного слоя пренебрегаем.

Оценим величины, входящие в уравнения (2.78-2.81), учитывая что:

$$x = O(\delta), \quad y = O(1), \quad \theta = O(1), \quad v = O(v_{\text{max}}),$$
 (2.82)

где v_{\max} — максимальное значение компоненты скорости, параллельной поверхности тела.

При оценке порядка величин учитывая также, что величина градиента давления $\partial \pi/\partial y$ мала по сравнению с основной движущей силой процесса — архимедовой силой:

$$Gr\theta \left|\cos\left(\vec{e}_{g},\vec{e}_{y}\right)\right| >> \left|\frac{\partial \pi}{\partial y}\right|;$$
 (2.83)

здесь учтено, что $(\vec{e}_g, \vec{e}_y) = O(1)$ ввиду малости угла (\vec{e}_g, \vec{e}_y) .

Из уравнения неразрывности следует

$$u = O(\delta v_{\text{max}}). \tag{2.84}$$

Далее получаем

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = O\left(\delta v_{\text{max}}^2\right). \tag{2.85}$$

Чтобы не пренебрегать нестационарностью процесса, следует положить в уравнении 2.78:

$$\frac{1}{\Pr} \frac{\partial u}{\partial Fo} = O\left(\delta v_{\max}^2\right)$$

поэтому, учитывая (2.84), получаем следующую оценку:

$$\frac{1}{\Pr} \frac{\partial}{\partial F_O} = O(v_{\text{max}}). \tag{2.86}$$

С учетом оценок уравнение (2.78) преобразуем к виду:

$$\frac{1}{\Pr} \frac{\partial u}{\partial Fo} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gr\theta \sin\left(\vec{e}_g, \vec{e}_y\right), \tag{2.87}$$

оно служит для расчета поля давления в погранслое и решается после решения уравнений движения и теплопереноса в приближении погранслоя, которые будут получены ниже из уравнений (2.79) и (2.80).

Инерционные члены в левой части уравнения (2.79) имеют порядок:

$$\frac{1}{\Pr} \frac{\partial v}{\partial Fo} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(v_{\max}^2\right). \tag{2.88}$$

Оценка вязкостных слагаемых в этом уравнении дает:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(\frac{v_{\text{max}}}{\delta^2}\right) + O\left(v_{\text{max}}\right) = O\left(\frac{v_{\text{max}}}{\delta^2}\right). \tag{2.89}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} >> \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Подставляя эти оценки (2.88-2.89) в уравнение (2.79), а также учитывая неравенство (2.83), получим:

$$O(v_{\text{max}}^2) = O\left(\frac{v_{\text{max}}}{\delta^2}\right) + O(Gr).$$

Приближение пограничного слоя основывается на предположении одинаковой роли инерционных и вязкостных слагаемых, поэтому можно записать:

$$O(v_{\text{max}}^2) = O(\frac{v_{\text{max}}}{\delta^2}) = O(Gr)$$

Отсюда получаем

$$v_{\text{max}} = O\left(\delta^{-2}\right); \quad v_{\text{max}} = O\left(\sqrt{Gr}\right);$$
 (2.90)

$$\delta = O\left(Gr^{-\frac{1}{4}}\right). \tag{2.91}$$

Из соотношений (2.90) и (2.91) следует, что увеличение числа приводит к уменьшению толщины погранслоя δ и увеличению скорости $v_{\rm max}$.

С учетом проведенных оценок уравнение (2.79) в приближении погранслоя запишем так:

$$\frac{1}{\Pr} \frac{\partial v}{\partial F_O} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Gr\theta \cos(\vec{e}_g, \vec{e}_y). \tag{2.91}$$

Оценим порядок членов в уравнении теплопереноса (2.80), учитывая, что $x = O(\delta_T)$, $\ell = \lambda/\lambda_0 = O(1)$.

Оценка членов правой части уравнения теплопереноса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) + O(1) = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)$$

приводит к следующему неравенству:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) >> \frac{\partial}{\partial y} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial y} \right). \tag{2.92}$$

Оценка всех членов уравнения теплопереноса дает:

$$O(\Pr v_{\max}) = O\left(\frac{1}{\delta_T^2}\right)$$

Откуда получаем

$$\delta_T = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Pr v_{\text{max}}}}\right). \tag{2.93}$$

Учитывая в соотношении (2.93) формулу (2.90), приходим к следующей зависимости:

$$\delta_T = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Pr\sqrt[4]{Gr}}}\right). \tag{2.94}$$

Сопоставив выражения (2.91) и (2.94), получим соотношение между толщинами динамического и теплового пограничных слоев:

$$\delta_T = O\left(\frac{\delta}{\sqrt{\Pr}}\right). \tag{2.95}$$

Таким образом, характер связи между δ и δ_T таков же, как и при градиентном течении жидкости. В случае $\Pr=1$ $\delta=\delta_T$, при $\Pr>>1$ $\delta>>\delta_T$, при $\Pr<<1$ $\delta>>\delta_T$. Из этого анализа делаем вывод, что приближение пограничного слоя справедливо лишь для жидкостей с $\Pr>>1$.

При анализе естественной конвекции в приближении пограничного слоя на величину числа Pr << 1 поле скорости, нужное для решения уравнения теплопереноса, вполне может быть получено из решения уравнений движения и неразрывности в более узком динамическом погранслое, так как за его пределами все составляющие скорости являются исчезающе малыми величинами в отличие от того, что имеем место при градиентном течении металлов.

Уравнение теплопереноса (2.80) с учетом оценки (2.92) в приближении погранслоя запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \Pr\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ell\frac{\partial \theta}{\partial x}\right). \tag{2.96}$$

Уравнения (2.81), (2.91), и (2.96) представляют собой полную систему уравнений для определения полей Θ и \vec{V} при тепловой конвекции. Они могут быть преобразованы к виду, удобному для дальнейшего использования:

$$\frac{1}{\Pr} \frac{\partial v}{\partial Fo} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Gr\theta \cos(\vec{e}_g, \vec{e}_y); \tag{2.97}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \Pr \left[\frac{\partial}{\partial x} (u\theta) + \frac{\partial}{\partial y} (v\theta) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \tag{2.98}$$

2.4.3 Тепловая конвекция от холодной вертикальной пластины

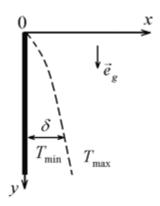


Рисунок 2.10 – Пограничный слой у вертикальной пластины

Постановка задачи. Имеется погруженная в горячую полубесконечная пластина (рис. жидкость холодная 2.10), расположенная параллельно вектору силы тяжести. Температура $T = T_{\min}$. Температура поддерживается постоянной пластины большом удалении пластины жидкости OT постоянной и равной T_{max} . В качестве базисной температуры $T = T_{\min}$, при которой будем считать определенными выберем ρ_0, c_P и ν . Безразмерную температуру значения формулой

$$\theta = \frac{T_{\text{max}} - T}{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}$$

Рассматривая задачу в приближении погранслоя, воспользуемся уравнениями (2.81), (2.97), (2.98). Направление координаты у выбрано таким образом, что $\cos(\vec{e}_g, \vec{e}_y) = 1$. Процесс считается установившимся, т.е.

$$\frac{\partial v}{\partial Fo} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = 0$$

Предполагаем, что коэффициент теплопроводности λ от температуры не зависит, поэтому $l = \lambda/\lambda_0 = 1$. С учетом принятых допущений система уравнений (2.81), (2.97), (2.98). примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Gr\theta; \qquad (2.99)$$

$$\Pr\left[\frac{\partial}{\partial x}(u\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(v\theta)\right] = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \qquad (2.100)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2.101}$$

Граничные условия:

$$u\big|_{x=0} = v\big|_{x=0} = v\big|_{x\to\infty} = \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x\to\infty} = 0; \qquad (2.102)$$

$$\theta|_{x=0}=1; (2.103)$$

$$\theta\big|_{x\to\infty} = \frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x\to\infty} = 0.$$
 (2.104)

Решение задачи методом Кармана. Наиболее эффективным и простым методом поставленной задачи является метод Кармана, в соответствии, с которым принимаем, что отсутствие скорости и нулевая температура достигаются не при $x \to \infty$, а на конечном расстоянии δ от пластины. При этом в качестве δ выбираем наибольшую из толщин теплового δ_T и динамического δ пограничных слоев.

Величина δ будет зависеть от координаты y. Таким образом, взамен строгих граничных условий на бесконечность запишем приближенные на конечном расстоянии δ от пластины:

$$v\Big|_{x=\delta(y)} = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=\delta(y)} = 0;$$
 (2.105)

$$\theta\big|_{x=\delta(y)} = \frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=\delta(y)} = 0.$$
 (2.106)

Проинтегрируем уравнения (2.99) и (2.100) по координате x поперек погранслоя в пределах от 0 до $\delta(y)$ с учетом граничных условий (2.104-2.106):

$$\Pr \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v\theta) dx + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \qquad (2.107)$$

$$\int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} \left(v^{2} \right) dx + \frac{\partial v}{\partial x} \bigg|_{x=0} = Gr \int_{0}^{\delta} \theta dx.$$
 (2.108)

Учитывая граничные условия, покажем возможность перемены порядка действий интегрирования и дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{0}^{\delta} v \theta dx = \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v \theta) dx + (v \theta) \Big|_{x=\delta} \frac{d\delta}{dy} = \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v \theta) dx
\vdots
\frac{\partial}{\partial y} \int_{0}^{\delta} v dx = \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v^{2}) dx + v^{2} \Big|_{x=\delta} \frac{d\delta}{dy} = \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v^{2}) dx$$

Поэтому уравнения (2.107) и (2.108) запишем так:

$$\Pr \frac{\partial}{\partial y} \int_{0}^{\delta} v \theta dx + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \qquad (2.109)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \int_{0}^{\delta} v^{2} dx + \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = Gr \int_{0}^{\delta} \theta dx.$$
 (2.110)

Профиль температуры и скорости постулируем в виде, удовлетворяющем граничным условиям:

$$\theta = \left(1 - x/\delta\right)^2; \tag{2.111}$$

$$v = A(y)x/\delta(1-x/\delta)^{2}. \tag{2.112}$$

Таким образом, сводим задачу к нахождению неизвестных функций A(y) и $\delta(y)$.

Определим интегралы и производные в уравнениях (2.109) и (2.110) с учетом выражений (2.111) и (2.112):

$$\int_{0}^{\delta} \theta dx = \delta/3; \quad \int_{0}^{\delta} v \theta dx = A\delta/30; \quad \int_{0}^{\delta} v dx = A^{2}\delta/105; \quad (2.113)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = -2/\delta; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = A/\delta.$$
 (2.114)

Подставляя выражения (2.113), (2.114) в уравнения (2.109), (2.110), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\Pr}{30} \frac{\partial}{\partial y} (A\delta) = 2/\delta; \qquad (2.115)$$

$$\frac{1}{105} \frac{\partial}{\partial y} \left(A^2 \delta \right) - \frac{A}{\delta} = Gr \frac{\delta}{3}. \tag{2.116}$$

Решение этих уравнений ищем в виде:

$$A = C_1 y^m; \quad \delta = C_2 y^n.$$
 (2.117)

Подставляя выражения (2.117) в уравнения (2.115), (2.116), получаем:

$$\frac{\Pr}{30}(m+n)C_1C_2y^{m+n-1} = \frac{2}{C_2}y^{-n}; \qquad (2.118)$$

$$\frac{2m+n}{105}C_1^2C_2y^{2m+n-1} - \frac{C_1}{C_2}y^{m-n} = Gr\frac{C_2}{3}y^n.$$
 (2.119)

Эти уравнения будут удовлетворяться при любых y в случае совпадения показателей степени при y:

$$m+n-1=-n$$
;

$$2m+n-1=m-n$$
; $m-n=n$.

Из этих условий находим m=1/2, n=1/4. Учитывая найденные значения для m и n, уравнения (2.117) и (2.119) сведем к уравнениям относительно C_1 и C_2 :

$$\frac{\Pr}{40}C_1C_2 = \frac{2}{C_2}; (2.120)$$

$$\frac{C_1^2 C_2}{84} + \frac{C_1}{C_2} = \frac{Gr}{3} C_2. \tag{2.121}$$

Решение уравнений (2.120), (2.121) дает выражения для $C_{\scriptscriptstyle 1}$ и $C_{\scriptscriptstyle 2}$:

$$C_1 = 5.17Gr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad C_2 = 3.93Gr^{-\frac{1}{4}}Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}}.$$
 (2.122)

С учетом формул (2.122) и значений для m и n выражения (2.117) примут вид:

$$A = 5.17Gr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \Pr\right)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}};$$
 (2.123)

$$\delta = 3.93Gr^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{20}{21} + \Pr \right)^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}.$$
 (2.124)

Подставляя выражение (2.123) в формулу (2.112), получаем окончательную формулу для компоненты скорости v:

$$v = 5.17Gr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \Pr\right)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\delta} \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^{2}.$$
 (2.125)

Таким образом, задача по определению поля скорости и температуры почти полностью решена.

Анализ решения. Определим v_{max} из уравнения:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0$$

где x^* - значение координаты, в которой скорость достигает максимального значения.

Отсюда, используя выражения (1.124) и (1.225), находим:

$$x^* = \frac{\delta}{3} = 1,31 Gr^{-\frac{1}{4}} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}$$

Тогда величина максимальной скорости

$$v_{\text{max}} = 0.766Gr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \text{Pr}\right)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}.$$
 (2.126)

Из последнего выражения следует, что при Pr>>1 увеличение числа Pr уменьшает $v_{\rm max}$. При Pr<<1 изменение числа Pr очень слабо сказывается на величине $v_{\rm max}$, а в предельном случае при $Pr\to 0$ получаем

$$v_{\text{max}}|_{\text{Pr}\to 0} = 0.78 \, Gr^{\frac{1}{2}} \, y^{\frac{1}{2}}.$$
 (2.127)

С ростом числа Gr, скорость v_{\max} всегда увеличивается.

Введем безразмерный коэффициент теплоотдачи Nu, позволяющий оценить перенос тепла от потока к пластине:

$$Nu = 2\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=0} = 1,16Gr^{\frac{1}{4}}\Pr^{\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + \Pr\right)^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}.$$
 (2.128)

Из выражения (2.128) следует, что по мере удаления от верхнего конца пластины величина Nu уменьшается пропорционально $y^{-1/4}$.

С ростом числа \Pr увеличивается тепловой поток к пластине пропорционально $\Pr^{\frac{1}{4}}$ при $\Pr>>1$ и пропорционально $\Pr^{\frac{1}{2}}$ при $\Pr<<1$. Поле $\frac{v}{v_{\max}}$, θ температур и распределение составляющей скорости v показано на рис. 2.11.

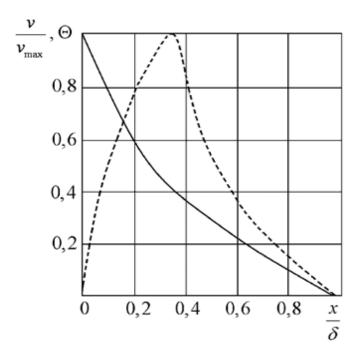


Рисунок 2.11 – Профили скорости (штриховая линия) и температуры (сплошная линия) в пограничном слое

2.4.4 Теплоотдача при свободном движении в ограниченном пространстве

B ограниченном пространстве явления нагревания И охлаждения жидкости протекают вблизи друг друга otor TИ разделить невозможно, ЭТОМ случае процесс ИХ В весь необходимо рассматривать в целом.

Вследствие ограниченности пространства и наличия восходящих и нисходящих потоков здесь сильно усложняются условия движения. Они зависят как от формы и геометрических размеров, так и от рода жидкости и интенсивности теплообмена.

В горизонтальных щелях, образованных двумя плоскими стенками, процесс определяется расположением нагретых и холодных плоскостей и расстоянием между ними.

Если нагретая поверхность расположена сверху (рисунок 2.12), то циркуляция совсем отсутствует. Если же нагретая поверхность расположена снизу, то имеются и восходящие, и нисходящие потоки, которые между собой чередуются.

В вертикальных щелях (рисунок 2.13) в зависимости от расстояния δ между стенками, циркуляция может протекать поразному.

Если δ велико, то восходящий и нисходящий потоки движутся без взаимных помех. Если же δ мало, то возникают внутренние циркуляционные контуры.

В расчетной практике сложный процесс переноса тепла через щели заменяют эквивалентным процессом теплопроводности

$$q = \frac{\lambda_{\scriptscriptstyle \mathcal{PKB}}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}), \quad \lambda_{\scriptscriptstyle \mathcal{PKB}} = \frac{q \cdot \delta}{t_{c1} - t_{c2}},$$

Если значения последнего разделить на λ среды, то получим безразмерную величину

$$\varepsilon_k = \frac{\lambda \Re \kappa}{\lambda},$$

которая характеризует собой влияние конвекции на перенос тепла через щель и называется коэффициентом конвекции. Так как циркуляция жидкости обусловлена разностью плотностей нагретых и холодных частиц и определяется критерием Gr Pr, то и коэффициент конвекции должен быть функцией того же аргумента

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = f(Gr_{\mathcal{H}} \cdot Pr_{\mathcal{H}}).$$

При вычислении чисел подобия независимо от формы прослойки за определяющий размер принята ее толщина δ , а за определяющую температуру — средняя температура жидкости t_{κ} =0,5(t_{c1} + t_{c2})

При
$$Gr_{\mathcal{H}} \cdot Pr_{\mathcal{H}} < 1000$$
 $\varepsilon_{\mathbf{k}} = 1$.

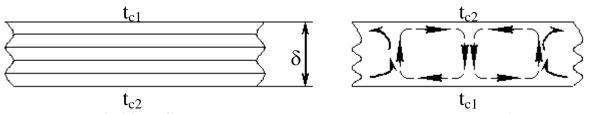


Рисунок 2.12 – Схема циркуляции жидкости при свободной конвекции в горизонтально расположенных щелях

Это означает, что при малых значениях $Gr_{\mathscr{H}} \cdot Pr_{\mathscr{H}}$ теплоотдача от горячей стенки к холодной в прослойках обуславливается только теплопроводностью жидкости.

При
$$10^3 < Gr_{\mathcal{H}} \cdot Pr_{\mathcal{H}} < 10^6 \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} = 0,105 (Gr_{\mathcal{H}} \cdot Pr_{\mathcal{H}})^{0,3};$$
 при $10^6 < Gr_{\mathcal{H}} \cdot Pr_{\mathcal{H}} < 10^{10} \, \varepsilon_{\mathbf{k}} = 0,4 (Gr_{\mathcal{H}} \cdot Pr_{\mathcal{H}})^{0,2}$ Для приближенных расчетов при $Gr_{\mathcal{H}} \cdot Pr_{\mathcal{H}} > 10^3 \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} = 0,18 (Gr_{\mathcal{H}} \cdot Pr_{\mathcal{H}})^{0,25}.$

Снижение интенсивности переноса тепла при больших значениях аргумента следует объяснить взаимной помехой в движении поднимающихся (нагретых) и спускающихся (охлажденных) струек жидкости.

Пример. Определить эквивалентный коэффициент теплопроводности плоской воздушной прослойки δ =25мм. Температура горячей поверхности t_{c1} =150°C, холодной t_{c2} =50°C.

$$\begin{split} t_{_{\mathcal{H}}} &= \frac{150 + 50}{2} = 100^{o} C. \quad \Delta t = 100; \\ \lambda_{_{\mathcal{K}}} &= 0,0321 \; \mathrm{BT/(M^{\circ}K)} \quad v_{_{\mathcal{K}}} = 2,31^{\circ}10^{-5} \; \mathrm{m^{2}/c} \; \mathrm{Pr_{_{\mathcal{K}}}} = 0,69; \\ Gr_{_{\mathcal{H}}} &= \frac{\beta g \cdot \Delta t \cdot \delta^{3}}{v^{2}} = \frac{9,81 \cdot (0,025)^{3} \cdot 100}{373 \cdot 5,33 \cdot 10^{-10}} = 7,73 \cdot 10^{4}; \\ Gr_{_{\mathcal{H}}} &\cdot Pr_{_{\mathcal{H}}} = 7,73^{\circ}10^{4} \cdot 0,69 = 5,33^{\circ}10^{4}; \quad (Gr_{_{\mathcal{H}}} \cdot Pr_{_{\mathcal{H}}})^{0,25} = 15,2; \\ \varepsilon_{_{\mathbf{K}}} = 0,18 (Gr_{_{\mathcal{H}}} \cdot Pr_{_{\mathcal{H}}})^{0,25} = 0,18^{\circ}15,2 = 2,74; \\ \lambda_{_{\mathcal{H}B}} = \varepsilon_{_{\mathbf{K}}} \cdot \lambda_{_{\mathcal{K}}} = 2,74 \cdot 0,0321 = 0,0885 \quad \mathrm{BT/(M^{\circ}K)}; \\ q &= \frac{\lambda_{_{_{\mathcal{H}B}}}}{\delta} \Delta t = \frac{0,0885}{0.025} \cdot 100 = 352 \quad \mathrm{BT/m^{2}}. \end{split}$$

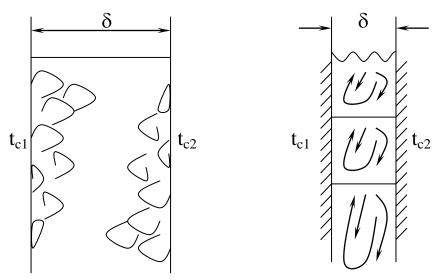


Рисунок 2.13 – Схема циркуляции жидкости при свободной конвекции в вертикально расположенных щелях

2.5 Вынужденная конвекция

Вынужденной конвекция называется тогда, когда движение жидкости (или газа) обусловлено разностью давлений или инерцией. При вынужденном движении скорости обычно более высокие, поэтому коэффициент теплоотдачи гораздо выше коэффициента теплоотдачи при свободном движении, а значит теплообмен с поверхностью нагрева протекает значительно интенсивнее, чем при свободной конвекции.

2.5.1 Гидродинамические условия развития процесса при продольном омывании плоской поверхности

Скорость и температура жидкости вдали от твердого тела постоянны и равны w_0 и t_0 . При продольном течении жидкости вдоль плоской поверхности происходит образование гидродинамического пограничного слоя, в пределах которого вследствие сил вязкого трения скорость изменяется от значения скорости невозмущенного потока на внешней границе слоя до нуля на самой поверхности пластины (рисунок 2.14).

При соприкосновении частиц жидкости с поверхностью тела они 'прилипают' к поверхности, в результате в пограничном слое образуется тонкий слой заторможенной жидкости. В пределах пограничного слоя $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$, а на границе и за границей

пограничного слоя $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Этот слой заторможенной жидкости называют *гидродинамическим пограничным слоем*

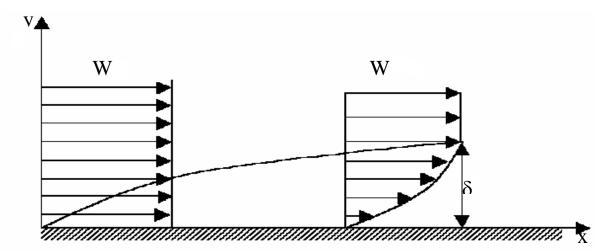


Рисунок 2.14 – Схема движения жидкости вдоль плоской

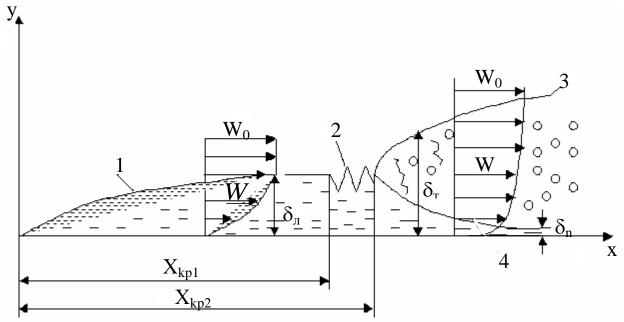


Рисунок 2.15 – Схема пограничного слоя

- 1 ламинарный пограничный слой; 2 переходная область;
- 3 турбулентный пограничный слой; 4 ламинарный подслой

Толщина пограничного слоя зависит от длины пластины: чем больше длина пластины, тем толще пограничный слой. Толщина пограничного слоя зависит от расстояния x от передней кромки пластины, от скорости потока w_0 и кинематической вязкости v.

На некотором расстоянии $x_{\rm kp}$ в пограничном слое начинают возникать вихри и течение принимает турбулентный характер: $x_{\rm kp_1}$, $x_{\rm kp_2}$ — координаты перехода от ламинарного режима к развитому турбулентному. Течение на этом участке имеет нестабильный характер и называется переходным (рисунок 2.15).

Переход к турбулентному режиму течения жидкости в пограничном слое определяется критическим значением числа Рейнольдса

$$\operatorname{Re}_{x_{\kappa pl}} = w_0 x_{\kappa pl} / \nu ,$$

которое при продольном обтекании пластины обычно принимают равным $\mathrm{Re_{Kp}} = 5 \cdot 10^5$.

$$\operatorname{Re}_{\kappa p1} = \frac{w_0 x_{\kappa p1}}{v}; \quad \operatorname{Re}_{\kappa p2} = \frac{w_0 x_{\kappa p2}}{v},$$

где $\text{Re}_{\kappa p1}$ – характеризует переход от ламинарного течения к неустановившемуся;

 ${\rm Re}_{\kappa p2}$ – переход от переходного течения к турбулентному.

Даже при турбулентном движении в пограничном слое у стенки имеется тонкий подслой, в котором течение жидкости имеет ламинарный характер. Этот подслой называют вязким.

Толщина гидродинамического пограничного слоя (при ламинарном движении) определяется из уравнения

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 4.64 \cdot \text{Re}_x^{-1/2}.$$
 (2.129)

 α

При турбулентном пограничном слое $\delta = 0.37 \frac{x}{\text{Re}_x^{0.2}}$.

2.5.2 Теплоотдача при продольном омывании плоской поверхности

Когда температура поверхности $t_{\rm c}$ и температура жидкости $t_{\rm ж}$ различны, между поверхностью и потоком теплоносителя происходит теплообмен

$$q = \alpha (t_c - t_{HC}).$$

Коэффициент теплоотдачи

гидродинамической картины режима течения теплоносителя, расстояния *х* от передней кромки пластины, теплофизических свойств среды. Температура жидкости по длине пластины меняется аналогично скорости движения (рисунок 2.16).

зависит:

OT

В процессе теплообмена около поверх-

ности пластины формируется тепловой пограничный слой, в пределах которого температура жидкости меняется от $t_{\rm c}$ до температуры потока $t_{\rm w}$ вдали от поверхности.

В пределах пограничного слоя
$$\frac{\partial t}{\partial y} \neq 0$$
.

пограничного слоя

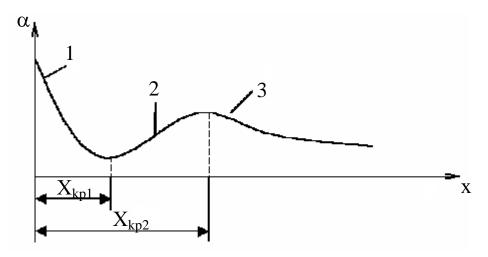


Рисунок 2.17 – Характер изменения коэффициента теплоотдачи вдоль пластины

Тепловой пограничный слой впервые ввел Кружилин Г.Н. Величина теплового пограничного слоя определяется из выражения

$$\frac{K}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}; \qquad (2.130)$$

$$\Pr = \frac{v}{a} = \frac{v \cdot \rho \cdot c_p}{\lambda} = \frac{\mu c_p}{\lambda};$$

$$K = \frac{4.64 \cdot x}{\sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}}}. \qquad (2.131)$$

Для капельных жидкостей как правило Pr>1, следовательно $K<\delta$.

Для газов Pr=0.6...1:

Pr=0.6 K=1.18
$$\delta$$
, K> δ ;

Pr=1
$$K=\delta$$
.

Изменение коэффициента теплоотдачи приведено на рисунке 2.17. При ламинарном течении перенос тепла между слоями жидкости осуществляется путем теплопроводности. При турбулентном пограничном слое основное изменение температуры происходит в пределах тонкого вязкого подслоя около поверхности, через который тепло переносится также только путем теплопроводности.

В турбулентном ядре пограничного слоя из-за интенсивного перемешивания жидкости изменение температуры незначительно и поле температур имеет ровный пологий характер (рисунок 2.15).

При нагреве жидкости коэффициент теплоотдачи всегда больше, чем при охлаждении. Опытным путем обнаружено, что зависимость теплоотдачи капельных жидкостей от направления теплового потока и температурного напора можно учитывать путем введения в критериальное уравнение дополнительного множителя $(Pr_{\infty}/Pr_c)^{0.25}$.

В этой поправке при вычислении Pr_{π} физические свойства жидкости определяются по средней температуре жидкости, а при вычислении Pr_{c} физические свойства жидкости определяются при температуре стенки.

При увеличении разности температур $t_{\rm c}$ и $t_{\rm ж}$ возникает дополнительное усложнение процесса, связанное с изменением физических параметров жидкости с температурой. Чем значительнее перепады температур, тем больше различаются вязкость, теплопроводность и теплоёмкость жидкости в разных точках пограничного слоя.

Например, если тепло передается от капельной жидкости к стенке (т.е. происходит охлаждение жидкости), то температура жидкости у поверхности становится меньше, а вязкость больше и скорость течения уменьшается. Изменяется гидродинамическая картина течения, что вызывает также изменение и теплоотдачи.

В результате обобщения многочисленных опытных данных теплоотдачи при продольном обтекании пластины различными теплоносителями были получены следующие расчетные зависимости.

При ламинарном режиме течения в пограничном слое местный коэффициент теплоотдачи определяется из соотношения

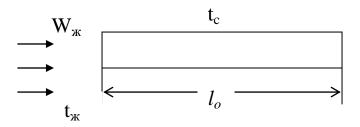
$$Nu_{HXX} = 0.33 \,\text{Re}_{HXX}^{0.5} \,\text{Pr}_{HX}^{0.33} \left(\frac{\text{Pr}_{HX}}{\text{Pr}_{G}}\right)^{0.25}$$
.

Если задана пластина конкретной длины, то средний коэффициент теплоотдачи на длине равен

$$Nu_{scl} = 0.66 \,\text{Re}_{scl}^{0.5} \,\text{Pr}_{sc}^{0.33} \left(\frac{\text{Pr}_{sc}}{\text{Pr}_{c}}\right)^{0.25}$$
 (*)

При турбулентном режиме течения в пограничном слое $(Re \ge 5 \cdot 10^5)$ локальный коэффициент теплоотдачи

$$Nu_{MX} = 0.03 \,\text{Re}_{MX}^{0.8} \,\text{Pr}_{M}^{0.43} \left(\frac{\text{Pr}_{M}}{\text{Pr}_{C}}\right)^{0.25}$$
.



Для определения среднего коэффициента теплоотдачи

$$Nu_{Ml} = 0.037 \,\text{Re}_{Ml}^{0.8} \,\text{Pr}_{M}^{0.43} \left(\frac{\text{Pr}_{M}}{\text{Pr}_{c}}\right)^{0.25}$$
 (**)

Для газов формулы (*) и (**) можно упростить.

Для воздуха Pr=0,71 и расчетные формулы для определения среднего коэффициента теплоотдачи принимают вид

- ламинарное движение в пограничном слое $Nu_{nel} = 0.57 \,\mathrm{Re}_{nel}^{0.5}$;
- турбулентное движение в пограничном слое $Nu_{scl} = 0.032 \,\mathrm{Re}_{scl}^{0.8}$.

Пример. Гладкая плита шириной b=1,6 м, длиной l_o =1,2м обтекается продольным потоком воздуха.

Скорость и температура набегающего потока $W_{\rm m}$ =8 м/с, $t_{\rm m}$ =20°C. Определить коэффициент теплоотдачи α и полный тепловой поток Q, если $t_{\rm c}$ =60°C.

При
$$t_{\text{ж}} = 20^{\circ}\text{C}$$
 $\lambda_{\text{ж}} = 0.0259 \text{ BT/(M·K)}; \nu_{\text{ж}} = 15.06 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{c};$

$$\text{Re}_{\text{ж}} = \frac{w_o \cdot l}{\nu_{\text{ж}}} = \frac{8 \cdot 1.2}{15.06 \cdot 10^{-6}} = 6.35 \cdot 10^5 > 5 \cdot 10^5;$$

$$\text{Nu}_{\text{ж}} = 0.032 \cdot (6.35 \cdot 10^5)^{0.8} = 0.032 \cdot 4.48 \cdot 10^4 = 1420;$$

$$\alpha = \frac{Nu_{\text{ж}} \cdot \lambda}{l_0} = \frac{1.42 \cdot 10^3 \cdot 0.0259}{1.2} = 30.6 \text{ BT/(M}^2 \cdot \text{K)};$$

$$Q = \alpha F \Delta t = \alpha b l(t_c - t_{\text{ж}}) = 30.6 \cdot 1.6 \cdot 1.2 \cdot 40 = 2350 \text{ BT}.$$

2.5.3 Обтекание пластины малотеплопроводными и высокотеплопроводными жидкостями.

B однородный поток жидкости, имеющий скорость $\vec{U} = \vec{u}_0 = const$ И температуру $T = T_{\text{max}} = const$, погружена полубесконечная пластина, поверхность которой поддерживается (рис. 2.18). $T = T_{\min} = const$ Процесс температуре при гидродинамическом и тепловом отношении предполагается

установившемся. Изменением коэффициента теплопроводности от температуры пренебрегаем.

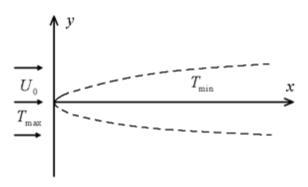


Рисунок 2.18 – Схема обтекания пластины

Для малопроводных жидкостей, характеризующихся числом Прандтля Pr=1, наиболее удобным методом решения задачи теплопереноса является приближение пограничного слоя. Систему уравнений движения и теплопереноса с учетом этого приближения в безразмерной форме запишем следующим образом:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
(2.132)

$$u\frac{\partial\Theta}{\partial x} + v\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr Re}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2};$$
 (2.133)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2.134}$$

где u и v - горизонтальная и вертикальная компоненты скорости. Здесь в качестве характерной скорости выбираем скорость набегающего потока u_0 , а в качестве характерной разности температур — величину $(T_{\max} - T_{\min})$.

Система уравнений (2.132)-(2.135) замыкается граничными условиями:

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0$$
; $u|_{y\to\infty} = 1$; (2.135)

$$\Theta\big|_{y=0} = 0 \; ; \quad \Theta\big|_{y\to\infty} = 1$$
 (2.136)

Решение гидродинамической части задачи.

Введя функцию тока ψ с помощью известных соотношений

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2.137}$$

и координату x' = x/Re, уравнение движения (2.132) приведем к уравнению относительно функции тока:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}.$$
 (2.138)

Граничные условия преобразуем к виду

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{y=0} = 0 \tag{2.139}$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y \to \infty} = 1 \tag{2.140}$$

Из условия (2.139) может быть получено после интегрирования граничное условие для функции тока:

$$\psi\big|_{y=0} = 0 \tag{2.141}$$

Решение для ψ ищем с привлечением функции Блазиуса:

$$\psi = -\sqrt{x'} \cdot f(P), \tag{2.142}$$

где $P = y/\sqrt{x'}$.

Тогда в новых переменных (f,P) задача (2.139) — (2.141) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$f''' + 0.5 f f'' = 0, (2.143)$$

с граничными условиями:

$$f|_{P=0} = f'|_{P=0} = 0; \quad f'|_{P\to\infty} = 1.$$
 (2.144)

Решение уравнения (2.143) с граничными условиями (2.144) имеется в литературе. Функция Блаузиуса и ее производные протабулированы и приводятся в справочниках и монографиях. Это позволяет определить компоненты скорости, воспользовавшись соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -f';$$

$$v = \frac{1}{2 \operatorname{Re} \sqrt{x'}} (f - Pf')$$

Решение тепловой части задачи ищем в виде

$$\Theta = \varphi(P, \Pr)$$

Тогда уравнение теплопереноса (2.133) и граничные условия в переменных φ и P запишем следующим образом:

$$\frac{\Pr f \, \varphi'}{2} + \varphi'' = 0 \tag{2.145}$$

$$\varphi|_{P=0} = 0$$
; $\varphi|_{P\to\infty} = 1$. (2.146)

После интегрирования уравнения с учетом граничных условий, имеем:

$$\Theta = \varphi = \int_{0}^{P} \exp\left[-\frac{\Pr}{2} \int_{0}^{P} f \, dP\right] dP$$

$$\int_{0}^{\infty} \exp\left[-\frac{\Pr}{2} \int_{0}^{P} f \, dP\right] dP$$
(2.147)

Используя уравнение (2.143), находим:

$$\exp\left[-\frac{\Pr}{2}\int_{0}^{P} f \, dP\right] = \exp\left[\Pr\ln\frac{f''(P)}{f''(0)}\right] = \left[\frac{f''(P)}{f''(0)}\right]^{\Pr}.$$
 (2.148)

С учетом выражения (2.148) решение для Θ упрощается:

$$\Theta = \frac{\int_{0}^{P} [f'']^{Pr} dP}{\int_{0}^{\infty} [f'']^{Pr} dP}$$

$$(2.149)$$

Анализ <u>результатов расчета</u>. При значении числа Pr = 1, имеем:

$$\Theta = \frac{f'(P) - f'(0)}{f'(\infty) - f'(0)} = -f' = u$$
(2.150)

В этом случае профиль безразмерной температуры совпадает с профилем безразмерной скорости (рис. 2.19).

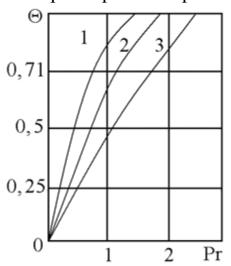


Рисунок 2.19 — Профили температуры в зависимости от чисел Pr: 1-Pr=15; 2-Pr=7; 3-Pr=1

При числах Pr > 1 значения Θ в соответствующих точках пограничного слоя больше значений u (рис. 2.19).

При числах Pr < 1 рассчитанные по формуле (2.149) значения Θ оказываются меньше значений u (рис. 2.19). Однако для таких значений числа Pr едва ли справедливо вести расчет в приближении погранслоя, в особенности и для чисел Pr = 1.

Определим безразмерный коэффициент теплоотдачи Nu, позволяющий судить о характере теплообмена между потоком и пластиной:

$$Nu = 2\frac{\partial \Theta}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 2\frac{\partial \Theta}{\partial P}\bigg|_{P=0} \cdot \frac{dP}{dy} = 2\Theta'\bigg|_{P=0} \sqrt{\text{Re}/x}$$
(2.151)

Выбирая x_0 таким образом, чтобы Re=1, получим следующее выражение для коэффициента теплоотдачи:

$$Nu = 2 \frac{\left[f''(0)\right]^{\Pr}}{\int_{0}^{\infty} \left[f''(P)dP\right]^{\Pr}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{F(\Pr)}{\sqrt{x}}$$
(2.152)

где F(Pr) — функция Польгаузена. В интервале значений числа Pr она может быть определена в виде

$$F(Pr) \approx 0,664 Pr^{1/3}$$
 (2.153)

Окончательно с учетом соотношения (2.153), получаем:

$$Nu(Pr) \approx 0,664 Pr^{1/3} / \sqrt{x}$$
 (2.154)

По мере приближения к передней кромке пластины, т.е. при $x \to 0$ коэффициент теплоотдачи от потока к пластине возрастает:

$$Nu|_{x\to 0}\to \infty$$

известно, что высокотеплопроводные жидкости (жидкие металлы) характеризуются малой величиной Прандтля: Pr=1. Поэтому приближение пограничного слоя для расчета теплопередачи процессов В таких средах оказывается неэффективным. Для таких применяется сред другой приближенный метод, основанный на идеях Буссинеска о теплопередаче в потоке «идеальной жидкости».

Приближение «<u>идеальной жидкости</u>». Рассмотрим уравнения движения и теплопереноса для несжимаемой жидкости, устремив в них число Pr к нулю:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + Pe(\vec{V}\nabla)\vec{V} = -EuPe\nabla\pi$$
; (2.155)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + Pe(\vec{V}\nabla)\Theta = \nabla(\ell\nabla\Theta)$$
(2.156)

В уравнении движения исчез вязкий член, и оно представляет собой уравнение Эйлера для идеальной жидкости, а

в уравнении теплопереноса исчез диссипативный член. Таким образом, предположение о высокой теплопроводности среды приводит к тому, что при определении полей скорости и температуры можно пренебрегать вязкими эффектами, проявляющимися вблизи твердых границ, и считать жидкость идеальной. Это облегчает решение задачи, особенно для плоских потоков, так как позволяет использовать хорошо отработанный аппарат функций комплексного переменного.

Используя векторный анализ, уравнение (2.155) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + \frac{Pe}{2} \nabla (\vec{V}^2) - \vec{V} \times rot \vec{V} = -Eu Pe \nabla \pi$$
(2.157)

Уравнение (2.157) вместе с уравнением неразрывности

$$\nabla \vec{V} = 0, \tag{2.158}$$

представляет собой полную систему уравнений, описывающих поля скоростей и давлений в потоке жидкости.

Для безвихревого движения, т.е. при

$$rot\vec{V} = 0, (2.159)$$

существует потенциал скорости φ :

$$\vec{V} = grad \, \varphi \,. \tag{2.160}$$

С учетом (2.159), (2.160) система уравнений (2.157), (2.158) может быть записана так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Fo} + Pe \frac{\vec{V}^2}{2} + Eu Pe \pi = f(Fo); \qquad (2.161)$$

$$\Delta \varphi = 0. \tag{2.162}$$

Уравнение (2.161) представляет собой интеграл Коши, полученный после интегрирования по пространству уравнения (2.155) с учетом условия (2.159). Оно может быть использовано для нахождения поля π после определения потенциала скорости из уравнения Лапласа (2.162) при соответствующих граничных условиях.

Преимущества использования теории функций комплексного переменного при решении гидродинамической части задачи заключаются в следующем. Использование этой теории позволяет деформировать обтекаемый сложный контур в простейший, решение для которого находится без особого труда. Этот метод называется методом конформных преобразований.

В этом случае существенным является свойство инвариантности уравнений Лапласа для функции ψ и потенциала φ , а также комплексного потенциала $\Phi(z)$ при любом конформном преобразовании:

$$\xi = f(z), \tag{2.163}$$

где

$$z = x + i y \tag{2.164}$$

- исходная плоскость;

$$\xi = \varepsilon_1 + i \,\varepsilon_2,\tag{2.165}$$

- новая, удобная для анализа плоскость.

<u>Преобразование Сретенского</u>. При решении задач теплопереноса с использованием теории функций комплексного переменного важное значение приобретает свойство уравнения теплопереноса для двумерного стационарного процесса сохранять инвариантность относительно любых конформных преобразований плоскости. Остановимся на доказательстве этого свойства.

Пусть выполнено конформное преобразование плоскости в новую плоскость ξ . Комплексный потенциал $\Phi^*(\xi)$ и комплексная скорость $W^*(\xi)$ в новой плоскости запишутся так:

$$\Phi^*(\xi) = \varphi^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + i\psi^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2); \tag{2.166}$$

$$W^*(\xi) = \frac{d\Phi^*}{d\xi} = u^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - iv^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$
(2.167)

Учитывая свойство инвариантности комплексного потенциала при конформном преобразовании $\Phi(z) = \Phi^*(\xi)$,

найдем связь между составляющими скорости u,v в плоскости z и составляющими u^*,v^* в плоскости ξ :

$$W(z) = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi^*}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = W^* \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + i \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} \right) =$$

$$= u^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + v^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} + i \left(u^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} - v^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \right)$$
(2.168)

Так как

$$W(z) = u - iv, (2.169)$$

а функция (2.163) аналитическая, т.е. для нее выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = -\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}, \tag{2.170}$$

из выражения следует:

$$u = u^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + v^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}$$

$$v = u^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} + v^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y}$$
; (2.171)

Определим следующий оператор в новых переменных:

$$u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} = \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \right)^2 \right] \left(u^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} + v^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \right). \tag{2.172}$$

Аналогично получаем формулу для оператора Лапласа в плоскости ξ :

$$\Delta = \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_2^2} \right). \tag{2.173}$$

Подставляя выражения (2.171) и (2.172) в уравнение (2.156), определим, что при переходе от плоскости z к плоскости ξ форма уравнения теплопереноса не изменяется:

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial \varepsilon_1} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial \varepsilon_2} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \varepsilon_2^2} \right), \tag{2.174}$$

что и требовалось доказать.

Формулировка задачи теплопереноса при обтекании пластинки металлическим расплавом. Поток жидкого металла набегает со скоростью U_0 на полубесконечную пластинку (рис. 2.18), температура поверхности которой поддерживается постоянной $T = T_{\min}$. Температура расплава на большом удалении от пластинки также постоянна $(T = T_{\max})$.

Процесс в тепловом и гидродинамическом отношении предполагается установившимся. Поэтому система уравнений движения и теплопереноса имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.175}$$

$$u\frac{\partial\Theta}{\partial x} + v\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} \right), \tag{2.176}$$

где

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (2.177)$$

Граничные условия запишем так:

$$u_{x\to\infty} = u\big|_{y\to\infty} = 1; \quad v\big|_{y\to0} = 0;$$
 (2.178)

$$\Theta\Big|_{y=0,x\geq 0} = 0; \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y}\Big|_{y=0,x<0} = 0; \qquad \Theta\Big|_{y\to\infty} = 1. \tag{2.179-2.181}$$

Условие выражает охлаждающее влияние пластинки на поток у передней кромки.

<u>Решение гидродинамической части задачи</u> в плоскости z = x + i y может быть представлено в виде:

$$\varphi = x \tag{2.182}$$

<u>Решение тепловой части задачи</u> вызывает затруднения в связи с необычными граничными условиями для температуры на

поверхности пластинки Поэтому предлагается использовать такое конформное преобразование исходной плоскости z в плоскость ξ , при котором полуось $y=0, x\geq 0$ преобразуется в прямую $\varepsilon_2=0$, бесконечную в обоих направлениях, а полуось y=0, x<0 - в ортогональную ей прямую $\varepsilon_1=0$.

Такое отображение плоскости с разрезом вдоль действительной оси $x \ge 0$ в полуплоскости ξ достигается конформным преобразованием:

$$\xi = \sqrt{z} \tag{2.183}$$

Тогда $\varepsilon_1 + i \varepsilon_2 = \sqrt{x + i y}$, откуда имеем

$$x = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2; \quad y = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2. \tag{2.184}$$

Из системы уравнений (2.184) получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$
; $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}$. (2.185)

Выразим граничные условия для температуры в новых переменных $[\varepsilon_1(x,y), \varepsilon_2(x,y)]$ применительно к плоскости ξ .

Используя условия Коши-Римана (2.170), определим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}.$$
 (2.186)

Из выражений (2.185) имеем

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} = \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} = \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{x^2 + y^2}}.$$
 (2.187)

Тогда равенство (2.186) с учетом (2.187) примет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_2} \right). \tag{2.188}$$

Поэтому условие отсутствия потока тепла (2.180) запишем следующим образом:

$$\left(\mathcal{E}_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \mathcal{E}_1} + \mathcal{E}_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \mathcal{E}_2} \right)_{\mathcal{E}_1 = 0} = 0$$

или окончательно

$$\left. \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_{1}} \right) \right|_{\varepsilon_{1}=0} = 0$$
(2.189)

Остальные граничные условия (2.179) и (2.181) преобразуем к виду:

$$\Theta\big|_{\varepsilon_2=0} = 0$$
; $\Theta\big|_{\varepsilon_2 \to \infty} = 1$. (2.190-2.191)

Уравнение теплопереноса (2.176) в новых переменных согласно теории Сретенского имеет вид:

$$u^* \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} + v^* \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_2} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \varepsilon_2^2} \right). \tag{2.192}$$

Для определения U^* и V^* воспользуемся выражениями :

$$u^* \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + v^* \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial x} = 1$$

$$u^* \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial y} + v^* \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} = 0$$
; (2.193)

Используя выражения (2.187), условия Коши-Римана (2.170), имеем:

$$\varepsilon_1 u^* - \varepsilon_2 v^* = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon_2 u^* + \varepsilon_1 v^* = 0$$
; (2.194)

Из выражений (2.184) устанавливаем связь

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2. \tag{2.195}$$

Тогда решение системы уравнений (2.194) дает:

$$U^* = 2\varepsilon_1; \quad V^* = -2\varepsilon_2. \tag{2.196}$$

С учетом полученных соотношений (2.196) уравнение теплопереноса (2.192) запишем так:

$$\varepsilon_{1} \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_{1}} - \varepsilon_{2} \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_{2}} = \frac{1}{2Pe} \left(\frac{\partial^{2} \Theta}{\partial \varepsilon_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2} \Theta}{\partial \varepsilon_{2}^{2}} \right). \tag{2.197}$$

Решение для уравнения (2.197) ищем в виде следующей функциональной зависимости, удовлетворяющей граничному условию (2.189):

$$\Theta = f\left(\varepsilon_2\right). \tag{2.198}$$

После подстановки $f(\varepsilon_2)$ в уравнение (2.197), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$0.5 f'' / Pe + \varepsilon_2 f' = 0. \tag{2.199}$$

Решение уравнения (2.199) с учетом граничных условий (2.190) и (2.191) имеет вид

$$f = \Theta = \frac{\int_{0}^{\varepsilon_{2}} e^{-Pe\varepsilon_{2}^{2}} d\varepsilon_{2}}{\int_{0}^{\varepsilon} e^{-Pe\varepsilon_{2}^{2}} d\varepsilon_{2}} = \frac{\int_{0}^{\varepsilon_{2}} \sqrt{Pe}}{\int_{0}^{\varepsilon} e^{-S^{2}} dS}$$

$$\int_{0}^{\varepsilon} e^{-Pe\varepsilon_{2}^{2}} d\varepsilon_{2} = \int_{0}^{\infty} e^{-S^{2}} dS$$
(2.200)

Вводя функцию Гаусса (интеграл ошибок),

$$erf\left(\varepsilon_2\sqrt{Pe}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\varepsilon_2\sqrt{Pe}} e^{-S^2} dS$$

а также учитывая условие ее нормировки

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-S^2} dS = 1$$

выражение (2.200) запишем так:

$$\Theta = erf\left(\varepsilon_2 \sqrt{Pe}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\varepsilon_2 \sqrt{Pe}} e^{-S^2} dS$$
(2.201)

Переходя от координаты ε_2 к исходным x и y в соответствии с соотношениями (2.185), получим:

$$\Theta = erf\left[\frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \sqrt{\frac{Pe}{2}}\right]. \tag{2.202}$$

Выбрав характерный размер, равный $x_0 = v/U_0$, последнее выражение запишем в виде:

$$\Theta = erf \left[\frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \sqrt{\frac{Pr}{2}} \right]. \tag{2.203}$$

На рис. 2.20 штриховой линией нанесены изотермы в потоке жидкости с Pr=1 в соответствии с формулой (2.149), полученной в приближении пограничного слоя. Сплошные линии построены в соответствии с формулой (2.102). В последнем случае наблюдается охлаждающее влияние пластинки перед ее передней кромкой. Этот эффект малосущественен для жидкостей с числом Pr=1 и поэтому не учитывается при решении задачи в приближении пограничного слоя.

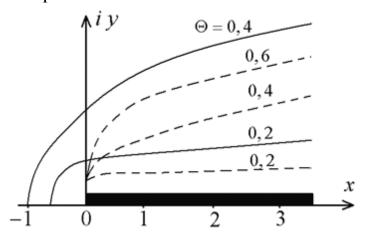


Рисунок 2.20 — Изотермы при обтекании пластины: сплошная линия - Pr = 0,1; штриховая - Pr = 1

Если характерный размер определить из условия Pe=1, то формула (2.102) примет вид:

$$\Theta = erf \left[\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \right]. \tag{2.204}$$

Изотермы, приведенные на рис. 2.21, справедливы при любых достаточно малых значениях числа Прандтля.

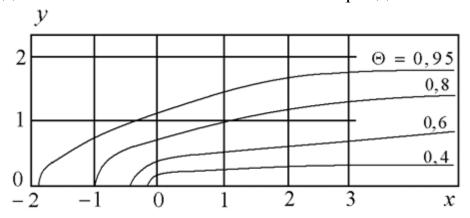


Рисунок 2.21 – Распределение изотерм по формуле (2.204)

2.6 Теплоотдача при течении жидкости в трубах 2.6.1 Особенности движения и теплообмена в трубах

При вынужденном движении жидкости внутри трубы различают два режима течения: ламинарный и турбулентный.

Ламинарный режим. Процесс теплоотдачи при течении жидкости в трубах является более сложным по сравнению с процессом теплоотдачи при омывании поверхности неограниченным потоком.

Поперечное сечение трубы имеет конечные размеры. В результате, начиная с некоторого расстояния от входа, жидкость по всему сечению трубы испытывает тормозящее действие сил вязкости. Ввиду конечных размеров трубы происходит изменение температуры жидкости, как по сечению, так и по длине канала. Все это сказывается на теплоотдаче.

О режиме течения судят по величине числа

Re =
$$\frac{-wd}{v}$$
,

где w — средняя скорость движения; d — внутренний диаметр трубы.

Если Re < Re $_{\kappa p1} \approx 2000$, то течение называется ламинарным (рисунок 2.22). Значение Re $_{\kappa p1} = 2000$ является нижним критическим значением числа Рейнольдса. Развитое турбулентное течение в технических трубах устанавливается при

$$Re > Re_{\kappa p2} \approx 10^4$$
.

Течение при

$$Re = 2 \cdot 10^3 ... 10^4$$

называется переходным. Ему соответствует и переходный режим теплоотдачи.

Если жидкость поступает в трубу из большого объема и

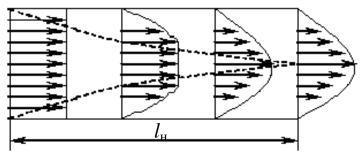


Рисунок 2.22 — Схема движения жидкости в трубе при ламинарном течении

стенки трубы на входе закруглены, распределение скоростей в начальном сечении будет равномерным. При движении у стенок образуется

гидродинамический пограничный слой,

толщина которого постепенно нарастает. В длинных трубах нарастание толщины пограничного слоя приводит к слиянию пограничных слоев и в трубе устанавливается постоянное распределение, характерное ДЛЯ данного режима течения. Расстояние, отсчитываемое от входа, на котором устанавливается распределение скоростей, называется постоянное длиной гидродинамического начального участка l" участком ИЛИ

гидродинамической стабилизации. Если $Re = \frac{wd}{v}$ меньше

критического, то на всем протяжении начального участка гидродинамической стабилизации в пограничном слое имеет место ламинарный характер. Когда Re>Re_{кр}, вблизи входного сечения сначала формируется ламинарный пограничный слой, который затем переходит в турбулентный и после смыкания турбулентных пограничных слоев устанавливается стабилизированное турбулентное течение жидкости (рисунок 2.23). При этом у самой поверхности в очень тонком вязком подслое течение сохраняет ламинарный характер.

Длина начального участка гидродинамической стабилизации при ламинарном режиме определяется соотношением $l_{_{\scriptscriptstyle H}}=0{,}05d~{
m Re}$.

При турбулентном течении величина $l_{\rm H}$ слабо зависит от Re и составляет примерно $l_{_{\rm H}} \approx 15 d$.

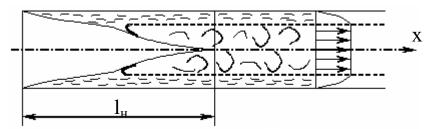


Рисунок 2.23 – Схема движения жидкости в трубе при турбулентном течении

2.6.2 Теплоотдача при ламинарном режиме

При ламинарном течении процесс переноса тепла от одного слоя жидкости к другому в направлении нормали к стенке осуществляется путем теплопроводности. В то же время каждый слой имеет в общем случае различную скорость продольного движения. Поэтому кроме процесса переноса тепла теплопроводностью осуществляется конвективный перенос тепла в продольном направлении.

Рассмотрим развитие процесса теплообмена вдоль трубы (рисунок 2.24).

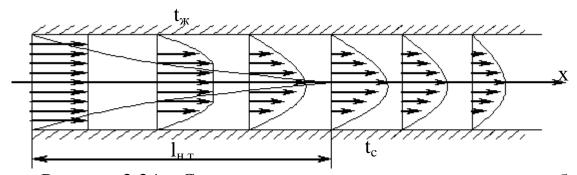


Рисунок 2.24 – Схема изменения температуры вдоль трубы при ламинарном режиме

По мере движения жидкости вдоль трубы наблюдается прогрев или охлаждение пристенных слоев. В начале трубы центральное ядро жидкости имеет ещё температуру равную температуре на входе, это ядро в теплообмене не участвует, все изменение температуры сосредотачивается в пристенных слоях.

Таким образом, у поверхности трубы в её начальной части образуется тепловой пограничный слой, толщина которого по мере удаления от входа увеличивается. На определенном расстоянии от входа, равном $l_{\rm H.T}$, тепловые слои смыкаются. Участок трубы длиной $l_{\rm H.T}$ носит название участка тепловой стабилизации или начального термического участка.

Пусть в начальном сечении температура жидкости постоянна и отличается по величине от температуры стенки. По мере движения происходит теплообмен между жидкостью и стенкой и температура жидкости изменяется. Около поверхности трубы образуется тепловой пограничный слой, толщина которого постепенно увеличивается в направлении движения потока. На некотором расстоянии от начального сечения трубы $l_{\rm H.T}$ тепловые пограничные слои смыкаются и в процессе теплообмена участвует далее весь поток жидкости. Расстояние $l_{\rm H.T}$ может быть приближенно оценено по зависимости

$$l_{\mu,m} \approx 0.05 \,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$$
.

В пределах теплового начального участка стабилизации температурный градиент в жидкости у стенки $(\partial t/\partial n)_{n\to 0}$ убывает по мере увеличения расстояния от входа быстрее, чем температурный напор $(t_{\infty}-t_c)$, так как центральная часть потока ещё не участвует в теплообмене. Поэтому из уравнения теплоотдачи

$$\alpha_{_{_{\mathcal{N}OK}}} = -\lambda \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{_{n\to 0}}}{\bar{t}_{_{\mathcal{H}}} - t_{_{c}}} = \frac{q_{_{_{X}}}}{\bar{t}_{_{\mathcal{H}}} - t_{_{c}}}$$
(2.205)

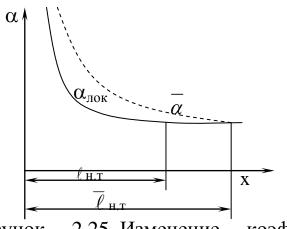


Рисунок 2.25–Изменение коэффициента теплоотдачи вдоль трубы

следует, что локальный коэффициент теплоотдачи постепенно уменьтрубы. шается ВДОЛЬ Падение локального коэффициента теплоотдачи продолжается до тех пор, пока пограничные слои не смыкаются. Далее обе величины $\partial t/\partial n$ $\bar{t}_{\infty} - t_c$ убывают c одинаковой скоростью, а локальный коэффициент теплоотдачи принимает постоянное значение. На рисунке 2.25 показано изменение коэффициента теплоотдачи в зависимости от длины трубы.

Этот график показывает, что расстояние, на котором происходит стабилизация средних коэффициентов теплоотдачи, $\overline{l_{_{\!H.m.}\!\!\!m}}$ всегда больше расстояния, отвечающего стабилизации локальных коэффициентов теплоотдачи $l_{_{\!H.m.}}$.

Михеев М.А. дает критериальное уравнение для определения коэффициента теплоотдачи для ламинарного режима течения

$$\overline{N}u_{_{\mathcal{H}d}} = 1.4 \left(Re_{_{\mathcal{H}d}} \frac{d}{l} \right)^{0.4} \cdot Pr_{_{\mathcal{H}}}^{0.33} \left(Pr_{_{\mathcal{H}}} / Pr_{_{l}} \right)^{0.25}. \tag{2.206}$$

Формула применима при $Re_{\kappa}>10$ и чисел $Pr_{\kappa}>0,06$ и отношении l/d>10.

Учет влияния естественной конвекции при различных положениях трубы в сочетании с различными условиями её нагревания и охлаждения, является достаточно трудной задачей. Приближенная оценка среднего коэффициента теплоотдачи при вязкостно-гравитационном режиме может быть произведена по формуле

$$\overline{N}u_{xcd} = 0.15 Re_{xcd}^{0.33} Pr_{xc}^{0.43} Gr_{xcd}^{0.1} \left(\frac{Pr_{xc}}{Pr_{c}}\right)^{0.25} \cdot \varepsilon_{l}. \qquad (2.207)$$

Здесь в виде определяющей принята средняя температура жидкости в трубе. Определяющим размером является внутренний диаметр трубы. Коэффициент ε_l учитывает изменение среднего коэффициента теплоотдачи по длине трубы. Если $l/d \geq 50$, то ε_l =1, при l/d < 50 поправку ε_l можно приближенно оценить с помощью таблицы 2.2.

Таблица 2.2 – Значение коэффициента ε_l при ламинарном режиме.

I -									
l/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
\mathcal{E}_{l}	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1

Вязкостно-гравитационный режим имеет место при $Gr Pr > 8 \cdot 10^5$, здесь $Gr = g \beta \Delta t d^3 / v^2$; $\Delta t = |(t_c - t_o)|$; t_o – температура

жидкости на входе в трубу; физические параметры, входящие в Gr Pr, выбираются по температуре $t=0.5(t_0+t_c)$

2.6.2.2 Математическая модель процесса. Решение гидродинамической части задачи

Процессы переноса импульса и тепла при ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости с учетом диссипации могут быть описаны с использованием уравнений Навье-Стокса, теплопереноса и неразрывности, сформулированных в критериальном виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + Pe(\vec{V}\nabla)\vec{V} = -EuPe\nabla\pi + Pr\Delta\vec{V}$$
; (2.208)

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe(\vec{V}\nabla)\theta = \nabla(\ell\nabla\theta) + \Pr EkDiss\vec{V}$$
; (2.209)

$$\nabla \vec{V} = 0. \tag{2.210}$$

В качестве безразмерного времени здесь использовано тепловое число Фурье: $Fo = at/x_0^2$. Система уравнений (2.208-2.210) сформулирована в предположении отсутствия массовых сил как гравитационного, так и электромагнитного происхождения.

Эта система уравнений позволяет определить поле температуры θ , скорости \vec{V} и давления π . Порядок решения данной задачи, учитывая независимость ее гидродинамической части от тепловой, может быть следующим: вначале необходимо решить систему уравнений (2.208) и (2.210), т.е. определить поле скорости, затем, используя его, решить уравнение теплопереноса (2.209) и определить поле температуры.

<u>Некоторые преобразования и краткая схема решения гидродинамической части задачи.</u>

Ввиду установившегося характера процесса имеем

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = 0$$

Так как жидкость движется вдоль трубы, то вектор скорости совпадает с направлением орта \vec{e}_{z} координатной оси (вдоль трубы) OZ, поэтому

$$\vec{V} = \vec{e}_Z w, \quad u = v = 0.$$

Из уравнения неразрывности следует

$$w = w(x, y)$$

т.е. w не зависит от координаты Z.

Из проекций уравнений движения (2.208) на координатные оси получаем, что $d\pi/dz = const$, в связи с чем гидродинамическая часть задачи сводится к решению уравнения Пуассона относительно w(x,y):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = Eu \operatorname{Re} \frac{d\pi}{dz}$$
 (2.211)

Уравнение (2.211) может быть существенно упрошено путем разумного выбора величины u_0 . Определим u_0 формальным условием, позволяющим максимально упростить правую часть (2.211):

$$Eu \operatorname{Re} \frac{d\pi}{dz} = -4 \tag{2.212}$$

С учетом (2.211) уравнение (2.212) примет вид, не содержащий никаких параметров:

$$\frac{\partial^2 w^3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -4$$
(2.213)

Учитывая принятые допущения, можно также упростить уравнение теплопереноса (2.209), так как u = v = 0, диссипативная функция и конвективный член запишутся следующим образом:

$$Diss\vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(gradw\right)^2$$
$$\left(\vec{V}\nabla\right)\theta = w\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

Тогда уравнение (2.209) для случая установившегося течения жидкости в трубе будет иметь вид:

$$Pew \frac{\partial \theta}{\partial z} = div(\ell \ grad \theta) + Pr Ek(grad w)^{2}$$
(2.214)

Дальнейшее решение задачи удобно выполнять в цилиндрической системе координат $(\eta_1, \eta_3, \varphi)$ в предположении осевой симметрии процесса.

Выбирая в качестве x_0 радиус трубы и переходя к цилиндрической системе координат, в силу осевой симметрии уравнение (2.213) запишем в виде:

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{dv_3}{d\eta_1} \right) = -4 \tag{2.215}$$

где η_1 - радиальная координата; ν_3 - осевая компонента скорости.

Уравнение (2.215) дополняется граничными условиями на оси $\eta_1 = 0$ и стенке $\eta_1 = 1$ трубы:

$$\frac{dv_3}{d\eta_1}\bigg|_{\eta_1=0} = v_3\bigg|_{\eta_1=1} = 0 \tag{2.216}$$

Решение уравнения (2.215) с учетом условий (2.216) дает выражение для безразмерного профиля скорости:

$$v_3 = 1 - \eta_1^2 \tag{2.217}$$

Видно, что профиль скорости не меняется с изменением радиуса трубы x_0 , вязкости жидкости, градиента давлений и, значит, не меняется с изменением u_0 (до тех пор, пока режим движения остается ламинарным).Полагая, что коэффициент теплопроводности λ для жидкости постоянен во всех точках потока, находим что $l \equiv 1$. Кроме того, учитывая (2.217), имеем:

$$Diss\vec{V} = 4\eta_1^2 \tag{2.218}$$

Тогда уравнение теплопереноса (2.214) в цилиндрической системе координат примет вид:

$$Pe\left(1-\eta_{1}^{2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\eta_{3}} = \frac{1}{\eta_{1}}\frac{\partial}{\partial\eta_{1}}\left(\eta_{1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta_{1}}\right) + \frac{\partial^{2}\theta}{\partial\eta_{3}^{2}} + 4\Pr Ek\eta_{1}^{2}$$
(2.219)

Далее вводим координату $\eta_3' = \eta_3 / Pe$, тогда уравнение (2.219) запишем так:

$$\left(1-\eta_1^2\right)\frac{\partial\theta}{\partial\eta_3'} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta_1}\left(\eta_1\frac{\partial\theta}{\partial\eta_1}\right) + \frac{1}{Pe^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta_3'^2} + 4\Pr Ek\eta_1^2.$$

Принимаем, что $Pe \gg 1$. В этом случае $\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_3'^2} << \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right)$, т.е. пренебрегаем теплопередачей теплопроводностью вдоль оси трубы по сравнению с теплопередачей теплопроводностью в радиальном направлении. Поэтому окончательно получаем:

$$\left(1 - \eta_1^2\right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta_3'} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1}\right) + 4 \operatorname{Pr} Ek \eta_1^2$$
(2.220)

Теперь сформулируем граничные условия. На стенке трубы

$$\theta \Big|_{\eta_1 = 1} = f\left(\eta_3'\right),\tag{2.221}$$

на оси трубы (условие симметрии) $\frac{\partial \theta}{\partial \eta_1}\bigg|_{\eta_1=0}=0\,,$

(2.222)

во входном сечении

$$\theta\big|_{\eta_2'=0} = \varphi\big(\eta_1\big). \tag{2.223}$$

2.6.2.2 Теплоперенос вследствие диссипации механической энергии потока

Уравнение (2.220) при граничных условиях (2.221-2.223) представляет собой полную формулировку задачи о поле температур в круглой трубе при заданных температурах на поверхности и во входном сечении. Решение такой задачи ищем в виде суммы двух функций:

$$\theta = \theta_1(\eta_1, \eta_3') + \theta_2(\eta_1) \tag{2.224}$$

Подставляя (2.224) в (2.220), получим:

$$\left(1 - \eta_1^2\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_3'} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1}\right) + \frac{1}{\eta_1} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\theta_2}{d\eta_1}\right) + 4 \operatorname{Pr} Ek \eta_1^2$$
(2.225)

Уравнение (2.225) будет удовлетворено, если θ_1 и θ_2 будут порознь удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left(1 - \eta_1^2\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_3'} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1}\right),$$
(2.226)

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\theta_2}{d\eta_1} \right) = -4 \operatorname{Pr} Ek \eta_1^2. \tag{2.227}$$

Граничные условия (2.221-2.223) с учетом (2.225) для $\theta_1(\eta_1,\eta_3')$ запишем так:

$$\theta_1 \Big|_{\eta_1 = 1} = f\left(\eta_3'\right); \tag{2.228}$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1 = 0} = 0 \tag{2.229}$$

$$\theta_1 \Big|_{\eta_3'=0} = \varphi(\eta_1) - \theta_2(\eta_1) = \varphi_1(\eta_1);$$
 (2.230)

и для $\theta_2(\eta_1)$:

$$\theta_2 \bigg|_{\eta_1 = 1} = \frac{d\theta_2}{d\eta_1} \bigg|_{\eta_1 = 0} = 0$$
 (2.231)

Уравнение (2.227) легко решается в квадратурах

$$\frac{d\theta_2}{d\eta_1} = -\Pr Ek\eta_1^3 + A/\eta_1$$

Используя условие симметрии в (2.231), получим A=0. Далее $\theta_2=-\frac{1}{4}\Pr{Ek\eta_1^4}+B$. Постоянную B определим из условия на стенке (2.231):

$$B = \frac{1}{4} \Pr{Ek}$$

Окончательно имеем

$$\theta_2 = \frac{1}{4} \Pr Ek \left(1 - \eta_1^4 \right)$$
 (2.232)

Если $\theta|_{\eta_1=1}=0$ и $\varphi_1(\eta_1)=0$, то очевидно, уравнение (2.226) имеет тривиальное единственное решение:

$$\theta_1 = 0$$

В этом случае единственным источником тепла в потоке является диссипация механической энергии движения и $\theta = \theta_2$ (рис. 2.26).

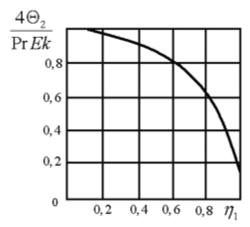


Рисунок 2.26 – Изменение температуры вследствие диссипации механической энергии потока

Другим предельным случаем будет такой, когда вкладом диссипации механической энергии потока в общую тепловую энергию можно пренебречь. Это соответствует очень малым величинам \Pr{Ek} , тогда $\theta_1 >> \theta_2$, $\theta \approx \theta_1$.

Такое приближение используется в практических расчетах маловязких жидкостях (расправленные металлы, вода и др.). С повышением вязкости жидкости, например, масел, пренебрежение величиной θ_2 не всегда будет оправданным. Таким образом, в общем случае полное решение задачи определяется суммой двух функций θ_1 и θ_2 .

2.6.2.3 Теплоперенос при постоянной температуре поверхности трубы

Температура на поверхности трубы может быть принята за минимальную, тогда граничное условие (2.228) упрощается

$$\theta_1 \Big|_{\eta_1 = 1} = 0 \tag{2.233}$$

В качестве максимальной температуры следует выбирать соответствующую температуру в некоторой точке входного сечения $\eta_3' = 0$. Таким образом, задача сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка (2.226) с граничными условиями.

Ищем частное решение уравнения (2.226) <u>методом</u> разделения переменных. Положим

$$\theta_1 = M(\eta_3) \Psi(\eta_1). \tag{2.234}$$

Подставляя и разделяя функции разных аргументов, получим:

$$\frac{M'(\eta_3')}{M(\eta_3')} = \frac{1}{\eta_1(1-\eta_1^2)} \frac{1}{\Psi(\eta_1)} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\Psi(\eta_1)}{d\eta_1} \right) = -k^2$$
(2.235)

Левая часть (2.235) зависит только от η_3' , правая — от η_1 , поэтому равенство возможно лишь в том случае, когда левая и правая части являются константой $\left(-k^2\right)$. Получим два уравнения:

$$M' + k^2 M = 0; (2.236)$$

$$(\eta_1 \Psi')' + \eta_1 (1 - \eta_1^2) k^2 \Psi = 0.$$
(2.237)

Определим общее решение (2.237)

$$M = Ae^{-k^2\eta_3'}, (2.238)$$

где А – константа интегрирования.

Для решения (2.237) следует найти граничные условия из (2.229) и (2.233) для $\Psi(\eta_1)$:

$$\Psi\big|_{\eta_1=1}=0\,; (2.239)$$

$$\Psi'\big|_{\eta_1=0}=0 \tag{2.240}$$

Сформулированная задача является задачей Штурма-Лиувилля о нахождении собственных значений параметров k_n и собственных функций Ψ_n . Общее решение задачи может быть построено путем суперпозиции частных

$$\theta_{1} = \sum_{n=1}^{\infty} Ane^{-k_{n}^{2}\eta_{3}'} \Psi_{n}(\eta_{1}), \qquad (2.241)$$

где A_n — постоянные коэффициенты, тождественно удовлетворяющие условию во входном сечении (2.230).

Для определения коэффициентов A_n докажем свойство двух произвольных собственных функций $\Psi_n(\eta_1)$ и $\Psi_m(\eta_1)$, являющихся нетривиальными решениями уравнения (2.237) при условиях (2.239) и (2.240) и собственных значениях параметра k, равных k_n и k_m . Тогда из (2.237) имеем два тождества:

$$\frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\Psi_n}{d\eta_1} \right) + k_n^2 \eta_1 \left(1 - \eta_1^2 \right) \Psi_n = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{d\eta_2} \left(\eta_1 \frac{d\Psi_m}{d\eta_2} \right) + k_m^2 \eta_1 \left(1 - \eta_1^2 \right) \Psi_m = 0$$

Умножая первое на Ψ_m , второе — на Ψ_n и вычитая из второго уравнения первое, затем, интегрируя полученное равенство от 0 до 1, а также учитывая граничное условие, получаем:

$$(k_n^2 - k_m^2) \int_0^1 \eta_1 (1 - \eta_1^2) \Psi_n \Psi_m d\eta_1 = 0$$

При $m \neq n$, $k_n^2 \neq k_m^2$, поэтому

$$\int_{0}^{1} \eta_{1} (1 - \eta_{1}^{2}) \Psi_{n} \Psi_{m} \big|_{m \neq n} d\eta_{1} = 0,$$
(2.242)

что свидетельствует об ортогональности Ψ_n и Ψ_m с весом $\eta_1 \left(1 - \eta_1^2 \right)$. Это позволяет определить коэффициенты A_n .

Предположим, что (2.241) удовлетворяет условию (2.230), тогда:

$$\varphi_1(\eta_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Psi_n$$

Умножив обе части последнего равенства на $\eta_1 (1-\eta_1^2) \Psi_m$ и проинтегрировав от 0 до 1,получим

$$\int_{0}^{1} \varphi_{1} \left(1 - \eta_{1}^{2}\right) \eta_{1} \Psi_{m} d\eta_{1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n} \int_{0}^{1} \Psi_{m} \Psi_{n} \eta_{1} \left(1 - \eta_{1}^{2}\right) d\eta_{1}$$

В правой части этого выражения с учетом (2.242) из бесконечной суммы сохранится лишь один член при m=n и поэтому

$$A_{n} = \frac{\int_{0}^{1} \varphi_{1} \eta_{1} (1 - \eta_{1}^{2}) \Psi_{n} d\eta_{1}}{\int_{0}^{1} \Psi_{n}^{2} \eta_{1} (1 - \eta_{1}^{2}) d\eta_{1}}.$$
(2.243)

Итак, остается определить Ψ_n и k_n , решив уравнение (2.237). Решение ищем в виде ряда:

$$\Psi_n(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \eta_1^n \tag{2.244}$$

Это решение удовлетворяет граничному условию (2.239) при любых B_n . Подстановка (2.244) в (2.226) дает:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 B_n \eta_1^{n-1} + k^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \eta_1^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \eta_1^{n+3} \right) = 0$$

Преобразуем последнее выражение так, чтобы показатели степени при η_1 во всех его членах были одного значения m:

$$\sum_{m=-1}^{\infty} (m+1)^2 B_{m+1} \eta_1^m + k^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_{m-1} \eta_1^m - \sum_{m=3}^{\infty} B_{m-3} \eta_1^m \right) = 0$$

Запишем это уравнение в виде:

$$B_{1} + \left(4B_{2} + k^{2}B_{0}\right)\eta_{1} + \left(9B_{3} + k^{2}B_{1}\right) + \sum_{m=3}^{\infty} \left[\left(m+1\right)^{2}B_{m+1} + k^{2}\left(B_{m-1} - B_{m-3}\right)\right]\eta_{1}^{m} = 0$$

Чтобы это уравнение удовлетворялось при любых значениях координаты η_1 , необходимо выполнение равенства нулю всех коэффициентов при членах с η_1 в разных степенях. Откуда:

$$B_1 = 0; \quad B_2 = -\frac{k^2}{4}B_0; \quad B_3 = -\frac{k^2}{9}B_1; \quad B_{m+1} = \frac{k^2}{(m+1)^2}(B_{m-3} - B_{m-1}). \quad (2.245)$$

Используя рекуррентное соотношение (2.220) при $m \ge 3$, получаем:

$$B_4 = \frac{k^2}{16} B_0 \left(1 + \frac{k^2}{4} \right); \quad B_5 = 0; \quad B_6 = -\frac{k^4}{64} B_0 \left(5 + \frac{k^2}{4} \right). \tag{2.246}$$

В развернутом виде решение с учетом (2.220) можно записать так:

$$\Psi(\eta_1) = B_0 \left[1 - \frac{k^2}{16} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \eta_1^4 - \frac{k^4}{64} \left(5 + \frac{k^2}{4} \right) \eta_1^6 + \dots \right] = B_0 \psi(\eta_1)$$
(2.247)

где $\psi(\eta_1)$ – функция, не зависящая от B_0 .

Используя граничное условие (2.214), получаем

$$1 - \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{16} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{64} \left(5 - \frac{k^2}{4} \right) + \dots = 0$$

Это уравнение имеет бесконечное множество корней $k_{\scriptscriptstyle n}$, называемых собственными значениями. Нуссельт вычислил первые три корня:

$$k_1 = 2,705$$
. $k_2 = 6,66$. $k_3 = 10,3$.

Каждому собственному значению k_n соответствует собственная функция $\psi(k_n,\eta_1)=\psi_n(\eta_1)$, которая может быть рассчитана по выражению (2.244) с использованием (2.245).

Первые три функции для приведенных значений k_n показаны на рис. 2.27.

Легко заметить, что окончательное выражение для θ_1 не будет зависеть от постоянного множителя B_0 , который может оставаться произвольным. После подстановки (2.247) в (2.243) имеем

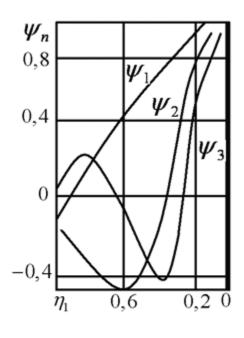
$$A_n = \alpha_n / B_0$$

где

$$\alpha_{n} = \frac{\int_{0}^{1} \varphi_{n} \psi_{n} \eta_{1} (1 - \eta_{1}^{2}) d\eta_{1}}{\int_{0}^{1} \psi_{n}^{2} \eta_{1} (1 - \eta_{1}^{2}) d\eta_{1}}; \qquad (2.248)$$

$$\theta_{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n} \psi_{n} e^{-k_{n}^{2} \eta_{3}^{\prime}}$$

$$\theta_{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n} \psi_{n} e^{-k_{n}^{2} \eta_{3}'}$$
(2.249)



ось трубы

Рисунок 2.27 – график функции [2]

Для частного случая, когда условие во входном сечении трубы может быть задано в относительно простом виде $\theta_1 \Big|_{\eta_3'=0} = \varphi_1 = 1$, коэффициенты α_n рассчитаны Нуссельтом ПО формуле (2.249):

$$\alpha_1 = 1,447$$
; $\alpha_2 = -0.810$; $\alpha_3 = 0.385$

Поэтому выражение для температуры (для трех членов ряда) может быть записано так:

$$\theta_{1} = 1,447e^{-2,705^{2}\eta_{3}'}\psi_{1}(\eta_{1}) - 0.81e^{-6.66^{2}\eta_{3}'}\psi_{2}(\eta_{1}) + 0.385e^{-10.3^{2}\eta_{3}'}\psi_{3}(\eta_{1}). \quad (2.250)$$

На рис. 2.28 приведено распределение температуры по радиусу и длине трубы (расчет выполнен по формуле (2.249)).

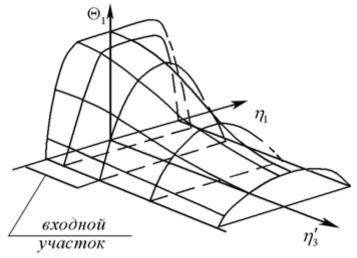


Рисунок 2.28 – Распределение температуры в трубе по Нуссельту

Так как собственные значения k_n быстро растут с ростом n, то при достаточно больших η_3' , учитывая экспоненциальный характер зависимости θ_1 от η_3' , можно в (2.249) ограничиться приближенно только первым членом бесконечного ряда:

$$\theta_1 \approx 1,447^{-2,705^2 \eta_3'} = \psi_1(\eta_1) \approx \theta$$
 (2.251)

Таким образом, при достаточно больших η'_3 изменение θ по радиусу в любом сечении приближенно описывается одной функцией $\psi_1(\eta_1)$. Поэтому говорят о подобии профилей температур во всех сечениях, достаточно удаленных от входного. В связи с изложенным становится понятным, что поток жидкости в трубе можно условно разбить на два участка. Первый участок называется термическим начальным участком, а второй — участком стабилизированного теплообмена (УСТ), который определяется приближенно формулой (2.251).

Термический начальный участок прилегает непосредственно к входному сечению, на нём функция θ_1 не дает

подобных профилей в отдаленных друг от друга сечениях, так как при её расчете наряду с первым членом ряда (2.251) учитывается, по крайней мере, и второй.

Для характеристики УСТ введем среднемассовую температуру в произвольном сечении трубы $\eta'_3 = const$;

$$\overline{\theta}_{1} = \frac{\int_{0}^{1} \theta_{1} v_{3} \eta_{1} d\eta_{1}}{\int_{0}^{1} v_{3} \eta_{1} d\eta_{1}} = 4 \int_{0}^{1} \theta_{1} \eta_{1} (1 - \eta_{3}') d\eta_{1}$$

Для УСТ, используя (2.251), получим:

$$\overline{\theta}_{1} = 4\alpha_{1}e^{-k_{1}^{2}\eta_{3}'}\int_{0}^{1}\psi_{1}(\eta_{1})(1-\eta_{1}^{2})\eta_{1}d\eta_{1}$$

На основании уравнения (2.237), справедливого для любой функции ψ_n , определим полученный выше интеграл:

$$\frac{d}{d\eta_{1}} \left(\eta_{1} \frac{d\psi_{1}}{d\eta_{1}} \right) = -k_{1}^{2} \eta_{1} \left(1 - \eta_{1}^{2} \right) \psi_{1}$$

и интегрируя от 0 до 1, получим:

$$\int_{0}^{1} \psi_{1}(\eta_{1}) \eta_{1}(1-\eta_{1}^{2}) d\eta_{1} = -\frac{1}{k_{1}^{2}} \psi_{1}' \Big|_{\eta_{1}=1}$$

$$\overline{\theta}_{1} = -\frac{4\alpha_{1}}{k^{2}} e^{-k_{1}^{2} \eta_{3}'} \psi_{1}' \Big|_{\eta_{1}=1}.$$
(2.252)

Поэтому

Для УСТ вычислим безразмерный тепловой поток от жидкости к поверхности трубы:

$$\delta \Big|_{\eta_1=1} = -\frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=1} = -\alpha_1 e^{-k_1^2 \eta_3'} \psi_1' \Big|_{\eta_1=1}$$
(2.253)

Определим местный безразмерный коэффициент теплоотдачи *Nu* от потока жидкости к стенке трубы в любом фиксированном сечении потока, используя ЛГУ-3:

$$\delta \bigg|_{\eta_1=1} = \frac{Nu}{2} \Big(\overline{\theta}_1 - \theta_1 \Big) \bigg|_{\eta_1=1} \equiv 0,5Nu\overline{\theta}_1$$

где $Nu = \alpha d/\lambda$ — характеризует соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности и переносом теплоты теплопроводностью через слой жидкости толщиной d: $d = 2x_0$ — диаметр трубы. Для УСТ, используя (2.252) и (2.253), определим:

$$Nu = 0.5k_1^2 \approx 3.66 \equiv Nu_{\infty}$$
 (2.254)

Из (2.254) следует, что предельный размерный коэффициент теплоотдачи α_{∞} не зависит от продольной координаты: $\alpha_{\infty} = Nu_{\infty}\lambda/d$. Для начального термического участка $(\eta_3')_{HT}$ можно определить как расстояние от входного сечения, на котором число Nu с точностью до 1% принимает постоянное значение. Используя полное решение задачи теплообмена, можно получить следующее выражение для $(\eta_3')_{HT}$:

$$(\eta_3')_{HT} = 0.055$$
 $(\eta_3')_{HT} = 0.055Pe$ (2.255)

Так, с увеличением скорости потока Re и числа Pr длина $(\eta_3')_{HT}$ возрастает. При заданном Re длина $(\eta_3')_{HT}$ определяется числом Pr . Для жидкометаллических теплоносителей (Pr <1) длина начального термического участка не превышает нескольких диаметров, для газов (Pr >>1) — нескольких десятков диаметров, для капельных Pr жидкостей — нескольких десятков тысяч диаметров. Отсюда следует, что в трубах теплообменных аппаратов для жидкостей с Pr >1 теплообмен при ламинарном течении происходит в области $(\eta_3')_{HT}$.

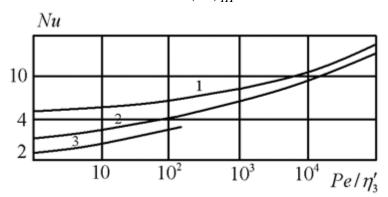


Рисунок 2.29 — Зависимость числа Nu от Pe/η'_3 ; 1 — плоская щель; 2 — круглая труба; 3 — равносторонний треугольник

На рис. 2.29 на основании общего решения (2.249) получена зависимость числа Nu по длине трубы от конфигурации её поперечного сечения. Наибольший теплообмен характерен для трубы, представляющей собой плоскую щель. Видно, что при $\eta'_3 \to 0$ $Nu \to \infty$.

2.6.2.4 Теплоперенос при периодическом изменении температуры поверхности трубы

Рассмотрим перенос тепла в трубе в условиях периодического режима, когда температура поверхности вдоль координаты меняется по периодическому закону. Такой процесс имеет место в трубчатых холодильниках, в глиссажных трубах и т.д.

Полагая радиус закругления участков изгиба трубы большим по сравнению с радиусом самой трубы, можно считать профиль скорости поток жидкости по-прежнему параболическим (2.217). Направляя ось η'_3 по оси трубы, изменение температуры вдоль ёе на поверхности трубы можно представить в виде

$$\theta_1 \Big|_{\eta_1 = 1} = f\left(\eta_3'\right),\tag{2.256}$$

где $f(\eta_3') = f(\eta_3'' + nl')$ — периодическая функция с периодом l'; $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$; $l' = L/x_0 Pe$ — безразмерный период; L — размерный период.

Исследуется поле температур в потоке на достаточно большом расстоянии от входного сечения, когда условия в нем не оказывают влияния на температурное поле и поэтому можно принять:

$$\theta_1 \Big|_{\eta_3'=0} = 0 \tag{2.257}$$

на оси симметрии трубы имеем:

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_3'} \right|_{\eta_1 = 0} = 0 \tag{2.258}$$

Итак, необходимо найти решение уравнение (2.226) при граничных условиях (2.256) –(2.258) для значений $\eta'_3 \to \infty$.

Для решения сформулированной задачи целесообразно воспользоваться методом преобразования Лапласа L по координате η_3' . Результат применения L к любой θ_1 назовем изображением этой функции:

$$\oint_{1} (S, \eta) = I\theta_{1} = \int_{0}^{\infty} e^{-S\eta_{3}'} \theta_{1}(\eta_{1}, \eta_{3}') d\eta_{3}'$$
(2.259)

S — параметр преобразования L, определенный в плоскости комплексного переменного.

Температура θ_1 по отношению к θ называется оригиналом. Применим (2.259) к обеим частям уравнения (2.226):

$$\int_{0}^{\infty} e^{-S\eta_{3}'} \left(1 - \eta_{1}^{2}\right) \frac{\partial \theta_{1}}{\partial \eta_{3}'} d\eta_{3}' = \int_{0}^{\infty} e^{-S\eta_{3}'} \frac{1}{\eta_{1}} \frac{\partial}{\partial \eta_{1}} \left(\eta_{1} \frac{\partial \theta_{1}}{\partial \eta_{1}}\right) d\eta_{3}'$$
(2.260)

Используя интегрирование по частям и условие (2.257), получаем вместо дифференциального уравнения в частных производных для изображения $\hat{\theta}_1$ обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$S\left(1-\eta_{1}^{2}\right) \theta_{1}^{2} = \frac{1}{\eta_{1}} \frac{d}{d\eta_{1}} \left(\eta_{1} \frac{d\theta_{1}^{2}}{d\eta_{1}}\right). \tag{2.261}$$

Преобразуем граничные условия:

$$\oint_{1} \Big|_{\eta_{1}=1} = \int_{0}^{\infty} e^{-S\eta'_{3}} f(\eta'_{3}) d\eta'_{3} \tag{2.262}$$

Последнее выражение быть может упрощено путем представления интеграла от 0 до ∞ в виде суммы ряда бесконечного слагаемых и использования при числа ЭТОМ формулы суммы членов убывающей геометрической ДЛЯ прогрессии:

$$\oint_{1} \left|_{\eta_{1}=1} = \frac{1}{1 - e^{-SI'}} \int_{0}^{I'} e^{-S\eta'_{3}} f\left(\eta'_{3}\right) d\eta'_{3} \right.$$
(2.263)

Задачу сведем к решению обыкновенного дифференциального уравнения, математически аналогичного (2.247) (k^2 на S), при граничных условиях (2.261) и (2.263) не является однородным,

поэтому сформулированная задача в целом не относится к задаче Штурма-Лиувилля.

Решение ищем в виде ряда:

$$\oint_{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n}}{n!} \eta_{1}^{2n}$$
(2.264)

Чтобы (2.264) удовлетворяло уравнению (2.261), следует подчинить, как и ранее, коэффициенты B_n рекуррентным соотношениям:

$$B_1 = \frac{S}{4}B_0$$
; $B_{n+2} = \frac{S}{4(n+2)}[B_{n+1} - B_n(n+1)].$

Отсюда

$$B_2 = -\frac{S}{8} \left(1 - \frac{S}{4} \right) B_0, \quad B_3 = \frac{S^3}{96} \left(5 - \frac{S}{4} \right) B_0, \dots$$

Поэтому

$$\oint_{1} = B_{0} \psi \left(-S, \eta_{1} \right) = B_{0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n}}{n!} \eta_{1}^{2n},$$
(2.265)

где $b_n = B_n / B_0$.

Постоянную B_0 определим из граничного условия:

$$B_0 = \frac{1}{\psi(-S,1)(1-e^{-Sl'})} \int_0^{l'} e^{-S\eta_3'} f(\eta_3') d\eta_3'$$

Окончательно получаем выражение для изображения:

$$\oint_{1} = \frac{\psi(-S,\eta)}{\psi(-S,1)(1-e^{-Sl'})} \int_{0}^{l'} e^{-S\eta'_{3}} f(\eta'_{3}) d\eta'_{3} \tag{2.266}$$

Следующий этап — переход от изображения $\hat{\theta}_1$ к оригиналу θ_1 с использованием обратного преобразования Лапласа и теории вычетов:

$$\theta_{1} = L^{-1}\left(\widehat{\theta}_{1}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{S\eta_{3}'} \widehat{\theta}_{1}(S, \eta_{1}) dS = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}\left[e^{S\eta_{3}'} \widehat{\theta}_{1}(S, \eta_{1})\right]\Big|_{S=Sn}, \quad (2.267)$$

где S_n - особые точки (полюсы) подынтегральной функции.

Для выполнения обратного преобразования L^{-1} в выражении (2.266) конкретизируем выбор функции $f(\eta_3)$:

$$f(\eta_3') = 0.5 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\eta_3'}{l'}\right)$$

Тогда

$$\int_{0}^{l'} e^{-S\eta_{3}'} f(\eta_{3}') d\eta_{3}' = 0,5 \int_{0}^{l'} \left(1 + \cos 2\pi \frac{\eta_{3}'}{l'}\right) e^{-S\eta_{3}'} d\eta_{3}' =$$

$$= \frac{1 - e^{-Sl'}}{2S} + \frac{S(1 - e^{-Sl'})}{2[S^{2} + (2\pi/l')^{2}]}$$
(2.268)

Таким образом, выражение (2.266) запишем так:

$$\oint_{1} = \frac{1}{2S} \frac{\psi(-S, \eta_{1})}{\psi(-S, 1)} + \frac{1}{2} \frac{S}{S^{2} + \left(\frac{2\pi}{l'}\right)^{2}} \frac{\psi(-S, \eta_{1})}{\psi(-S, 1)},$$
(2.269)

Анализ функции $\hat{\theta}_1$ (2.269) показывает, что она имеет лишь простые полюсы (полюсы первого порядка). Поэтому подынтегральную функцию в (2.267) представим в виде:

$$e^{S\eta_3'} \widehat{\theta_1}(S, \eta_1) = \frac{P(S, \eta_1)e^{S\eta_3'}}{\theta(S_1)}. \tag{2.270}$$

Для вычетов этой функции в точке $S = S_n$, где она имеет простой полюс, используем формулу:

$$\operatorname{Res}\left(\widehat{\theta}_{1}^{S}e^{S\eta_{3}^{\prime}}\right)\Big|_{S=S_{n}} = \frac{e^{S_{n}\eta_{3}^{\prime}}P(S_{n},\eta_{1})}{\theta^{\prime}(S_{n})},$$
(2.271)

где $\theta'(S_n) = \frac{d\theta(S)}{dS}\Big|_{S=S_n}$; S_n - n-й – корень уравнения $\theta'(S_n) = 0$.

Так как нас интересует величина θ_1 при $\eta_3' \to \infty$, то можно не учитывать полюсы в действительных точках S_n , являющихся корнями уравнения $\psi(-S,1)=0$, равными $S_n=-k_n^2<0$.

Действительно, согласно (2.271) для $S_n < 0$ соответствующие вычеты стремятся к нулю при $\eta_3' \to \infty$.

Среди полюсов функции $\hat{\theta}_1$ нас будет интересовать следующие:

$$S_0 = 0$$
; $S_{1,2} = \pm i2\pi/l'$.

Тогда из выражения (2.267) с учетом (2.269) имеем:

$$\theta_{1}\Big|_{\eta_{3}'=hl'+h_{3}''} = 0.5 \frac{\psi(0,n_{1})}{\psi(0,1)} + 0.25 \left[\frac{\psi(-i2\pi/l',\eta_{1})}{\psi(-i2\pi/l',1)} e^{\frac{i2\pi}{l'}\eta_{3}''} + \frac{\psi(i2\pi/l',\eta_{1})}{\psi(i2\pi/l',1)} e^{-\frac{i2\pi}{l'}\eta_{3}''} \right]$$

$$(2.272)$$

В последней формуле первое слагаемое упрощается, так как согласно (2.265) $\psi(0,\eta_1)=\psi(0,1)=1$. Поэтому

$$\theta_{1}\Big|_{\eta_{3}'=nl'+\eta_{3}''} = 0.5 + 0.25 \left[\frac{\psi(-i2\pi/l',\eta_{1})}{\psi(-i2\pi/l',1)} e^{\frac{i2\pi}{l'}\eta_{3}''} + \frac{\psi(-i2\pi/l',\eta_{1})}{\psi(-i2\pi/l',1)} e^{\frac{i2\pi}{l'}\eta_{3}''} \right]. (2.273)$$

Анализ решения (2.272) показывает, что периодический нагрев и охлаждение стенки приводит к такому нагреву и охлаждению жидкости. Однако нагрев и охлаждение центральной зоны потока не просто повторяют нагрев и охлаждение поверхности, а имеют свои особенности (рис. 2.30). Во-первых, максимум θ_1 на оси потока смещен по отношению к максимуму θ_1 на поверхности на некоторую долю периода в направлении движения жидкости. Относительная величина этого смещения уменьшается с увеличением периода l'.

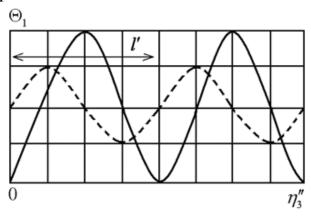


Рисунок 2.30 — Распределение температуры θ_1 по длине трубы: на поверхности (сплошной) и оси трубы (пунктиром)

Во-вторых, максимум θ_1 на оси трубы меньше по величине максимума θ_1 на поверхности (то же относится и к минимумам). В-третьих, увеличение значения l' приближает максимумы (минимумы) θ_1 на оси трубы и на поверхности друг к другу по величине. При необходимости учета выделения тепла внутри потока вследствие вязкой диссипации механической энергии к решению (2.272) следует прибавить величину θ_2 , определяемую формулой (2.232).

2.6.3 Определение средней температуры жидкости

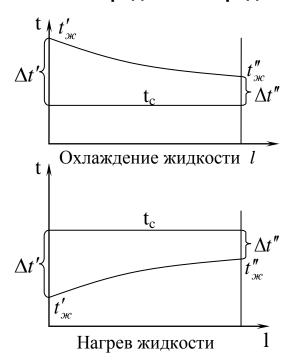


Рисунок 2.31 – Определение средней температуры жидкости

Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи

$$\overline{\alpha} = \frac{Q}{F(t_{HC} - t_c)} = \frac{\overline{q}}{t_{HC} - t_c}$$

необходимо в общем случае знать средние по длине трубы или канала значения температуры среды стенки $t_{\rm c}$. Если температура стенки $t_{\rm c}$ изменяется незначительно, TO усреднение температуры $t_{\rm w}$ по длине производится следующим образом (рисунок 2.31).

При небольшом изменении средней температуры вдоль трубы величина $\bar{t}_{\mathcal{H}}$

может быть определена как среднее арифметическое из значений температуры в начальном $t'_{\mathcal{H}}$ и конечном $t''_{\mathcal{H}}$ сечениях трубы

$$\bar{t}_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(t'_{\mathcal{H}} + t''_{\mathcal{H}} \right).$$

В общем случае определение проводится по формуле

$$\bar{t}_{\scriptscriptstyle \mathcal{H} c} = t_c \pm \Delta t_{\scriptscriptstyle \mathcal{H} o_{\mathcal{E}}},$$

где знак "+" берется в случае охлаждения, а знак "-" в случае нагревания жидкости по длине канала.

Величина $\Delta t_{\text{лог}}$ называется среднелогарифмическим температурным напором, определяется по соотношению

$$\Delta t_{noe} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t''}\right)},$$

где Δt ' и Δt '' — температурные напоры в начальном и конечном сечениях трубы или канала.

2.6.4 Теплоотдача при турбулентном режиме

При турбулентном режиме движения (Re>104) перенос тепла внутри жидкости осуществляется путем перемешивания. При этом перенос протекает настолько интенсивно, что по сечению ядра потока температура жидкости практически постоянна. Резкое изменение температуры наблюдается лишь внутри тонкого слоя у поверхности. Было проведено большое количество исследований с различными каналами и разного рода широком диапазоне изменения жидкостями В параметров. На основе анализа и обобщения этих исследований для расчета среднего коэффициента теплоотдачи установлена зависимость

Таблица 2.3 — Значения коэффициента $\overline{\varepsilon}_l$ при турбулентном режиме.

Re _ж	1/d										
RC _Ж	1	2	5	10	15	20	30	40	50		
1.104	1.65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1		
2.10^4	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1		
5·10 ⁴	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1		
1.10^{5}	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1		
1.10^{6}	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1		

За определяющую температуру принята средняя температура жидкости, за определяющий размер — эквивалентный диаметр. Если диаметр трубы имеет не круглую

форму, а какую-то другую, необходимо найти эквивалентный диаметр

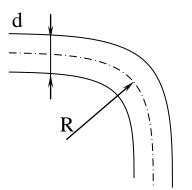


Рисунок 2.32 – Схема изогнутой трубы

$$d_{9\kappa\theta} = \frac{4f}{p}$$
,

где p — полный периметр канала; f — площадь поперечного сечения канала.

При движении жидкости изогнутых трубах (коленах, отводах, змеевиках) (рисунок 2.32) неизбежно возникает центробежный эффект. Поток жидкости отжимается внешней стенке И ИЗОГНУТОМ В сечении возникает так называемая вторичная циркуляция.

C увеличением радиуса кривизны R влияние центробежного эффекта уменьшается.

Расчет теплоотдачи в изогнутой трубе производится по формулам для прямой трубы с последующим введением в качестве сомножителя поправочного коэффициента $\varepsilon_{\rm r}$

$$\varepsilon_r = 1 + 1.77 \frac{d}{R},$$

где d – диаметр трубы.

<u>Пример.</u> По трубе d=60мм и l=2.1м протекает воздух со скоростью w=5м/с. Определить значение коэффициента теплоотдачи α , если средняя температура воздуха \overline{t}_{∞} = $100^{\circ} C$.

При
$$t_{\kappa}$$
=100°C λ_{κ} =0,0321 BT/(м·К); v_{κ} =23,13·10⁻⁶ м²/c; $Re_{\kappa} = \frac{w \cdot d}{v_{\kappa}} = \frac{5 \cdot 0.06}{23.13 \cdot 10^{-6}} = 12970$ $Re_{\kappa} > Re_{\kappa} = 1 \cdot 10^{4}$

$$\overline{Nu} = 0.021 \operatorname{Re}_{\mathcal{M}}^{0,8} \operatorname{Pr}_{\mathcal{M}}^{0,43} \left(\frac{\operatorname{Pr}_{\mathcal{M}}}{\operatorname{Pr}_{c}} \right)^{0,25} \varepsilon_{l}.$$

Для воздуха или двухатомных газов Pr_{x} ≈0,71 и Pr_{x}/Pr_{c} ≈1.

$$\overline{Nu}_{\mathcal{H}} = 0.018 \operatorname{Re}_{\mathcal{H}}^{0,8} \varepsilon_{l};$$

$$Re_{\mathcal{H}}^{0,8} = 1955$$
;

$$\overline{Nu}_{3c} = 0.018 \cdot 1955 = 35,2;$$

$$lpha = \overline{Nu}_{\mathcal{M}} \cdot \frac{\lambda_{\mathcal{M}}}{d} = 32,5 \cdot \frac{0,0321}{0,06} = 18,8 \, Bm/(M^2 \cdot K);$$
 $\frac{l}{d} = \frac{2.1}{0.06} = 35$, то поправка $\varepsilon_l = 1,04;$
 $lpha' = 1.04 \cdot lpha = 19.5 \, Bm/(M^2 \cdot K).$

2.6.4.1 Уравнения турбулентного движения и теплопереноса несжимаемой жидкости

В любой точке турбулентного потока вектор скорости, давление и температуру принято представлять как сумму двух величин:

$$\vec{U} = <\vec{U}> + \vec{U}'; P = < P> + P'; T = < T> + T',$$
 (2.275)

где $<\vec{U}>,< P>,< T>$ - усредненные величины скорости, давления и температуры; \vec{U}',\vec{P}' и \vec{T}' - пульсационные составляющие скорости, давления и температуры. Пользуясь безразмерными величинами, введенными ранее, соотношения

Ошибка! Источник ссылки не найден. запишем так:

$$\vec{V} = <\vec{V}> + \vec{V}'; \quad \pi = <\pi> +\pi'; \quad \theta = <\theta> +\theta'. \tag{2.276}$$

Искомые уравнения турбулентного движения и теплопереноса получаются путем подстановки в уравнения теплопереноса, движения и неразрывности вместо мгновенных значений соответствующих величин их представления в виде выражений (2.276) и последующего усреднения по времени этих уравнений. При этом в уравнении теплопереноса диссипативным членом пренебрегаем.

Введем безразмерный тензор вязких напряжений

$$\overline{\overline{\tau}} = -\frac{1}{\text{Re}} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \eta_j} + \frac{\partial v_j}{\partial \eta_i} \right), \tag{2.277}$$

и безразмерный молекулярный поток тепла

$$\vec{\delta}_T = -\frac{grad\theta}{Pe} \tag{2.278}$$

Далее выполним следующие тождественные преобразования:

$$-Div\overline{\overline{\tau}} = \frac{\left(\Delta \vec{V}\right)}{\text{Re}},\tag{2.279}$$

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V} = Div\overline{VV}, \quad (\vec{V}\nabla)\theta = div(\theta\vec{V}).$$
 (2.280)

Используя выражения (2.279) и (2.280), а также полагая $\ell = 1$, уравнения движения и теплопереноса, запишем в виде:

$$\frac{1}{Pe}\frac{\partial V}{\partial Fo} + Div\overline{\vec{V}\vec{V}} = -Eu\nabla\pi - Div\overline{\bar{\tau}}$$
; (2.281)

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + div \left(\theta \vec{V}\right) = -div \vec{\delta}_T \tag{2.282}$$

После усреднения по времени уравнения, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial \langle \vec{V} \rangle}{\partial Fo} + Div \langle \overline{\overline{VV}} \rangle = -Eu\nabla\pi - Div \left(\langle \overline{\overline{\tau}} \rangle + \langle \overline{\overline{V'V'}} \rangle \right); \qquad (2.283)$$

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial Fo} + div(\langle \theta \vec{V} \rangle) = -div(\langle \vec{\delta}_T \rangle + \langle \theta' \vec{V}' \rangle), \qquad (2.284)$$

где средний тензор вязких напряжений $<\overline{\overline{\tau}}>$ и средний молекулярный поток тепла $<\vec{\delta}_{T}>$ имеют вид

$$<\overline{\overline{\tau}}> = -\frac{1}{\text{Re}} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial < v_{i}>}{\partial \eta_{j}} + \frac{\partial < v_{j}>}{\partial \eta_{i}} \right); \quad <\vec{\delta}> = -\frac{1}{Pe} \operatorname{grad} <\theta>. \quad (2.285)$$

Применяя операцию усреднения к уравнению неразрывности, получаем два уравнения для средней величины скорости

$$div < \vec{V} >= 0, \tag{2.286}$$

и пульсационной составляющей скорости

$$div\vec{V}' = 0. (2.287)$$

Таким образом, из анализа уравнений (2.283) и (2.284) следует, что в турбулентных потоках тензор напряжений и вектор плотности теплового потока увеличиваются. Появляется дополнительный тензор турбулентных напряжений $<\overline{V'V'}>$, обусловленный пульсациями скорости, и вектор турбулентного потока тепла $<\theta'\vec{V'}>$, обусловленный пульсациями скорости и температуры, которые условно в соответствии с теорией Буссинеска можно представить в виде, аналогичном выражениям (2.285):

$$<\overline{\overline{V'V'}}> = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{v_T}{v} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial < v_i >}{\partial n_j} + \frac{\partial < v_j >}{\partial n_i} \right); \quad <\theta' \vec{V'}> = -\frac{1}{Pe} \frac{a_T}{a} \operatorname{grad} <\theta>,(2.288)$$

где $v_{\scriptscriptstyle T}, a_{\scriptscriptstyle T}$ — эффективные коэффициенты турбулентной кинематической вязкости и турбулентной температуропроводности.

Полный тензор напряжений $<\overline{\overline{\tau}}_n>$ и полный вектор плотности потока тепла $<\overline{q}_n>$ можно записать в виде:

$$\langle \overline{\overline{\tau}}_{n} \rangle = -\frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \frac{v_{T}}{v} \right) \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial \langle v_{i} \rangle}{\partial \eta_{j}} + \frac{\partial \langle v_{j} \rangle}{\partial \eta_{i}} \right); \qquad (2.289)$$

$$\langle \overline{\delta}_{n} \rangle = -\frac{1}{Pe} \left(1 + \frac{a_{T}}{a} \right) \operatorname{grad} \langle \theta \rangle \qquad (2.290)$$

Уравнения (2.283) – (2.286) представляют собой систему уравнений движения и теплопереноса в турбулентных потоках Из-за несжимаемой жидкости. наличия В уравнениях усредненных произведений пульсаций скорости и температуры V $<\theta'\vec{V}'>$ эта система уравнений незамкнута. Для получения решений реальной задачи необходимо постулировать некоторые дополнительные зависимости между пульсациями и соответствующими средними значениями скорости И какие-либо температуры, вводить другие допущения И привлекать константы, получаемые из эксперимента.

2.6.4.2 Математическая модель турбулентного движения и теплопереноса в круглых трубках, решение и обсуждение сформулированной задачи

Будем считать процессы движения и теплопереноса осесимметричными, т.е. полагать искомые величины Задачу независимыми угла φ ,. сформулируем OTцилиндрической системе координат η_1, η_3, φ . Ось η_3 совпадает с жидкости. Процесс направлением потока считается установившимся, поэтому

$$\frac{\partial <\vec{V}>}{\partial Fo} = \frac{\partial <\theta>}{\partial Fo} = 0 \tag{2.291}$$

Вектор средней скорости, как и при ламинарном движении жидкости, совпадает с направлением координатной оси η_3 , так что можно записать:

$$\langle \vec{V} \rangle = \vec{e}_3 \langle v_3 \rangle, \quad \vec{V}_1 = 0.$$
 (2.292)

Из уравнения неразрывности с учетом выражения (2.292) следует, что $\langle v_3 \rangle$ не зависит от координаты η_3 и является функцией только радиальной координаты η_1 :

$$\langle v_3 \rangle = \langle v_3 \rangle (\eta_1)$$
 (2.293)

Кроме того, предполагается, что усредненные произведения пульсаций скорости $< v_1'v_1'>$, $< v_1'v_3'>$ и $< v_3'v_3'>$ также не зависит от координаты η_3 .

С учетом принятых допущений система уравнений движения и неразрывности в проекциях на оси примет вид:

$$Eu\frac{\partial \langle \pi \rangle}{\partial \eta_1} = -\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} (\eta_1 \langle v_1' v_1' \rangle)$$
(2.294)

$$Eu\frac{\partial \langle \pi \rangle}{\partial \eta_3} = -\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \left(\langle \tau_{31} \rangle + \langle v_1' v_3' \rangle \right) \right); \tag{2.295}$$

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} (\eta_1 v_1') + \frac{\partial v_3'}{\partial \eta_3} = 0$$
(2.296)

где

$$<\tau_{31}> = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial < v_3>}{\partial \eta_1}$$
 (2.297)

Выражение для $\langle v_1'v_3' \rangle$ по-прежнему определяем из соотношений (2.288):

$$< v_1' v_3' > = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{v_T}{v} \frac{d < v_3 >}{d\eta_1}$$
 (2.298)

Формулировку гидродинамической части задачи завершим постановкой граничных условий на стенке трубы:

$$< v_3 > |_{\eta_1 = 1} = v_1' |_{\eta_1 = 1} = v_3' |_{\eta_1 = 1} = \frac{\partial v_1'}{\partial \eta_1} |_{\eta_1 = 1} = 0.$$
 (2.299)

Перейдем теперь к постановке тепловой части задачи. Пренебрегая потоком тепла, теплопроводностью вдоль оси η_3 по сравнению с потоком тепла теплопроводностью поперек трубы, а также учитывая соотношения (2.291), (2.292), уравнение теплопереноса (2.284) запишем так:

$$\langle v_{3} \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \eta_{3}} = -\frac{1}{\eta_{1}} \frac{\partial}{\partial \eta_{1}} \left[\eta_{1} \left(-\frac{1}{Pe} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \eta_{1}} + \langle \theta' v_{1}' \rangle \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta_{3}} \left(\langle \theta' v_{3}' \rangle \right). \tag{2.300}$$

Сформулируем к уравнению турбулентного теплопереноса граничные условия. Пусть температура поверхности трубы поддерживается постоянной вдоль осевой координаты η_3 и равной минимальному значению $T_{II} = T_{\min}$. Тогда на стенке трубы имеем следующее условие:

$$\langle \theta \rangle \Big|_{\eta_1 = 1} = 0 \tag{2.301}$$

Кроме того, на стенке трубы отсутствуют пульсации температуры:

$$\theta'|_{\eta_1=1} = 0. (2.302)$$

Из анализа уравнения (2.300) видно, что в общем случае средняя температура $<\theta>$ и её пульсация зависят от координаты η_3 .

Поэтому необходимо записать еще одно граничное условие во входном сечении трубы $(\eta_3 = 0)$. Однако есть возможность упростить задачу. Для этого предположим, что на некотором небольшом участке трубы, достаточно удаленном от входного сечения, температура вдоль осевой координаты практически не изменяется, а средняя температура на оси трубы считается известной величиной:

$$<\theta>\Big|_{\eta_1=0}=\theta_0=const$$
 (2.303)

С учетом принятого допущения справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \eta_3} = \frac{\partial \theta'}{\partial \eta_3} = 0 \tag{2.304}$$

Принимая во внимание условие (2.304), уравнение теплопереноса (2.300) значительно упростим

$$\frac{d}{d\eta_{1}} \left[\eta_{1} \left(-\frac{1}{Pe} \frac{d < \theta >}{d\eta_{1}} + < \theta' v_{1}' > \right) \right] = 0$$
(2.305)

Вводя турбулентный коэффициент температуропроводности в соответствии с выражением (2.288), уравнение (2.305) запишем в виде:

$$\frac{d}{d\eta_{1}} \left[\eta_{1} \left(-\frac{1}{Pe} \left(1 + \frac{a_{T}}{a} \right) \right) \frac{d < \theta >}{d\eta_{1}} \right] = 0$$
(2.306)

Таким образом, математическая модель тепловой части задачи турбулентного теплопереноса представляет собой систему, состоящую из обыкновенного дифференциального уравнения (2.305) или (2.306) и граничных условий.

<u>Гидродинамическая часть задачи</u>. Математическая модель гидродинамических процессов в трубе описывается уравнениями (2.294)–(2.296) и граничными условиями к ним (2.299). Решение задачи удобно выполнять с использованием новой переменной $\eta = 1 - \eta_1$, отсчитываемой от стенки трубы. Анализ задачи осуществляется для двух зон турбулентного потока: вблизи стенки трубы и в турбулентном ядре потока. При этом алгоритм

решения гидродинамической части задачи предполагается читателю известным из курса теории турбулентности.

Решение задачи вблизи стенки трубы, когда $\eta \to 0$, имеет следующий вид:

$$\langle v_3 \rangle = \eta^* - \frac{S\eta^*}{5!},$$
 (2.307)

где $\eta^* = \text{Re}\eta$; S — константа.

При малых η^* , стремящихся к нулю, выражение (2.307) сводится к более простому:

$$\langle v_3 \rangle \approx \eta^* \tag{2.308}$$

То предельное значение $\eta^* = \eta_\Pi^*$, при котором выражение еще остается справедливым, называется толщиной вязкого слоя. В пределах вязкого слоя роль турбулентных напряжений $< v_1'v_3' >$ весьма мала по сравнению с таковым вязких напряжений $\frac{1}{\text{Re}} \frac{d < v_3 >}{d\eta}$, что согласуется с малостью последнего слагаемого в выражении (2.307).

Рассмотрим теперь область турбулентного ядра потока, когда $\eta > \eta_{\Pi}$. Здесь влияние стенок сказывается лишь на максимальном значении скорости и не сказывается на профиле скорости в ядре потока. Этот факт вытекает из малости вязкого тензора напряжений по сравнению с турбулентным тензором напряжений в рассматриваемой части потока. Сказанное позволяет в уравнениях (2.294-2.295) пренебречь величиной $<\tau_{31}>$.

Упрощенное таким образом уравнения гидродинамики для турбулентного ядра потока обладают свойством инвариантности относительно преобразования подобия. На основании указанного свойства инвариантности А.С. Мониным и А.М. Ягломом была получена формула для скорости, соответствующая логарифмическому профилю скорости:

$$\langle v_3 \rangle = A \ln \eta^* + B,$$
 (2.309)

где A и B — универсальные константы, не зависящие от свойств жидкости.

По экспериментальным данным Никурадзе константы имеют следующие значения: A = 2,5 и B = 5,5. Тогда для средней скорости окончательно запишем:

$$\langle v_3 \rangle = 2.5 \ln \eta^* + 5.5$$
 (2.310)

Соотношение (2.310) справедливо при $\eta^* \ge \eta_\Pi^* = 30$. Формула (2.308) для вязкого $\langle v_3 \rangle$ слоя справедлива до значений $\eta^* \le \eta_\Pi^* = 5$ (рис 2.33).

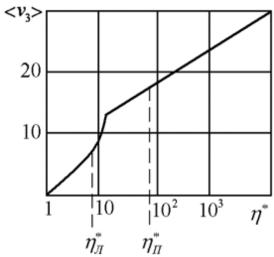


Рисунок 2.33 — Профиль средней скорости при турбулентном движении жидкости в трубе

Формула, учитывающая турбулентные пульсации скорости в вязком слое, позволяет определить $< v_3 >$ в более широком интервале значений η^* (вплоть до $\eta_{\Pi}^* = 30$). При этом константа S находится из условия равенства величин скорости $< v_3 >$, определенных по формулам (2.307) и (2.310). Поэтому в вязком слое при $\eta_{\Pi}^* \le 30$ справедлива следующая формула:

$$\langle v_3 \rangle = \eta^* - 0.66 \cdot 10^{-6} \eta^{*5}$$
 (2.311)

Применяя формулу (2.311) для $< v_3 >$ в области вязкого слоя, выражение (2.310) для $< v_3 >$ в турбулентном ядре потока и привлекая соотношение (2.298), являющееся определением коэффициента вязкости, получаем следующую зависимость:

$$\frac{V_T}{V} = \begin{cases} 3, 3 \cdot 10^{-6} \eta^{*4}, & \eta^* \le \eta_{\Pi}^*; \\ 0, 4 \cdot \eta^*, & \eta^* \ge \eta_{\Pi}^*. \end{cases}$$
(2.312)

Выбирая выражение для характерной скорости

$$U_0 = \sqrt{\frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{\rho} \left(-\frac{\partial < \pi >}{\partial \eta_3} \right)}$$

таким образом, чтобы напряжение на стенке трубы τ_0 обращалось в единицу, получим на основании решения уравнений (2.294-2.295) следующее соотношение:

$$\left(1 + \frac{v_T}{v}\right) \frac{d < v_3 >}{d\eta^*} = 1$$
(2.313)

Из анализа последнего соотношения вытекает, что граница η_{Π}^{*} вязкой и турбулентной области может определятся из условия

$$\frac{v_T}{v}\bigg|_{\eta^* = \eta_{II}^*} \approx 1 \tag{2.314}$$

Для вязкой области $\left(\eta^* \leq \eta_{\Pi}^*\right)$ величина $v_T/v < 1$ и ею можно пренебречь в сравнении с единицей. В турбулентной области $\left(\eta^* \geq \eta_{\Pi}^*\right)$ величина $v_T/v > 1$ и единицей можно пренебречь в сравнении с v_T/v .

<u>Тепловая часть задачи</u>. Уравнение теплопереноса вблизи стенки трубы $(\eta \to 0)$ с учетом введенной ранее переменной может быть записано в более простой форме:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{Pe} \frac{d < \theta >}{d\eta} + < \theta' v_1' > \right) = 0 \tag{2.315}$$

Интегрируя уравнение, получаем:

$$\frac{1}{Pe} \frac{d < \theta >}{d\eta} + <\theta' v_1' > = \delta_0 = const$$
(2.316)

Учитывая граничные условия (2.299) и (2.302), имеем:

$$\delta_0 = \frac{1}{Pe} \frac{d < \theta >}{d\eta} \bigg|_{\eta=0}$$
 (2.317)

Из последнего соотношения видно, что величина δ_0 представляет собой некоторый безразмерный поток на стенку трубы.

Для дальнейших расчетов удобно характерную разность температур $T^* - T_{II}$ выбрать из условия равенства единице безразмерного потока тепла на стенку трубы:

$$\delta_0 = \frac{a}{u_0 \lambda} \frac{\langle q_0 \rangle}{T^* - T_{II}} = 1$$
(2.318)

Учитывая, что $a = \lambda/(\rho c_p)$, соотношение (2.317) запишем в виде:

$$T^* - T_{II} = \langle q_0 \rangle / (u_0 \rho c_P),$$
 (2.319)

где $< q_{\scriptscriptstyle 0} >$ - размерный тепловой поток на стенку трубы.

Выражение (2.319) устанавливает линейную связь между характерной разностью температуры и потоком на стенку трубы. Одна из этих двух величин должна быть определена из решения тепловой части задачи.

Принимая во внимание соотношение (2.318) и заменяя η на η^* , уравнение (2.316) запишем следующим образом:

$$\frac{1}{\Pr} \frac{d < \theta >}{d\eta^*} + <\theta' v_1' > = 1$$
(2.320)

Из анализа последнего уравнения, учитывая результаты решения гидродинамической части задачи, можно предположить, что в общем случае безразмерная температура

$$\langle \theta \rangle = \frac{\langle T \rangle - T_{\Pi}}{T^* - T_{\Pi}} \tag{2.321}$$

будет функцией аргумента η^* и критерия \Pr в некотором слое вблизи стенки трубы:

$$\langle \theta \rangle = \varphi(\eta^*, \Pr).$$
 (2.322)

Очевидно, что поле температуры может быть весьма разным в зависимости от числа Pr, характеризующего свойства жидкости.

Учитывая, что турбулентный поток тепла порождается тем же пульсационным движением, что и турбулентный поток импульса, при анализе температурного поля допускаем:

$$a_T \sim V_T \,. \tag{2.323}$$

Величина a_T определяется выражением (2.288), из которого следует, что

$$<\theta'v_1'>=\frac{1}{Pe}\frac{a_T}{a}\frac{d<\theta>}{d\eta}=\frac{1}{\Pr}\frac{a_T}{a}\frac{d<\theta>}{d\eta^*}.$$
 (2.324)

Тогда уравнение (2.320) может быть преобразовано к виду:

$$\left(1 + \frac{a_T}{a}\right) \frac{d < \theta >}{d\eta^*} = \Pr$$
(2.325)

Из анализа выражения (2.325) следует, что для $a_T/a > 1$ можно пренебречь молекулярным переносом тепла в сравнении с турбулентным, а при $a_T/a < 1$, наоборот. Граничное значение координаты $\eta^* = \eta_T^*$, при котором $a_T/a \sim 1$, определяет толщину теплового слоя. Подобно выражению (2.314), толщина теплового слоя находится из выражения:

$$\frac{a_T}{a}\bigg|_{\eta^*=\eta_T^*} \sim 1 \tag{2.326}$$

Используя выражения (2.314), (2.323) и (2.326), получаем:

$$\left. \frac{v_T}{a} \right|_{\eta^* = \eta_T^*} \sim \frac{v_T}{v} \bigg|_{\eta^* = \eta_T^*},$$

ИЛИ

$$v_T \Big|_{\eta^* = \eta_T^*} = \frac{v_T}{\Pr} \Big|_{\eta^* = \eta_T^*}$$
 (2.327)

Если Pr = 1, т.е. v = a, то из (2.327) следует

$$\left.
u_T \right|_{\eta^* = \eta_T^*} =
u_T \left|_{\eta^* = \eta_H^*} \right|_{\eta^* = \eta_H^*}$$

В этом случае видно, что толщина вязкого и теплового слоев одинаковы $(\eta_T^* \sim \eta_\Pi^*)$. При этом уравнение теплопереноса (2.325) совпадает с уравнением движения (2.313). Последний факт позволяет говорить о подобии профилей скорости и температуры при $\Pr = 1$.

Если \Pr <<1, т.е. $a>>\nu$, например для расплавленных металлов, то из выражения (2.327) следует, что $\eta_T^*>\eta_\Pi^*$ (рис. 2.34,a).

Подставляя в соотношение (2.327) формулу для v_T (2.312), получаем:

$$\eta_T^* = b/\Pr, \qquad (2.328)$$

где $b = \alpha \cdot 3, 3 \cdot 10^{-6} \cdot 30^4 / 0, 4$; α - константа порядка единицы определяемая из эксперимента.

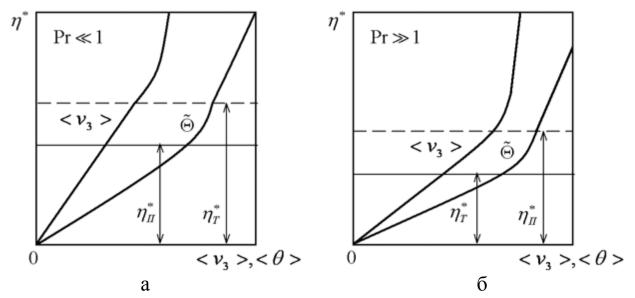


Рисунок 2.34 – Профили скорости и температуры для жидкостей с числами Прандтля, большими (а) и меньшими единицы (б)

Для сред с числом Pr >> 1 по аналогичной схеме получаем следующее соотношение:

$$\eta_T^* = \gamma \eta_\Pi^* / \Pr^{1/4} = 30 \gamma / \Pr^{1/4},$$
(2.329)

где γ - коэффициент пропорциональности, определяемый из эксперимента и имеющий порядок единицы.

Рассмотрим область потока, в которой перенос тепла определяется турбулентными пульсациями. Для всех жидкостей эта область определяется условием:

$$\eta^* \ge Sup(\eta_T^*, \eta_\Pi^*). \tag{2.330}$$

Пренебрегая молекулярным потоком тепла по сравнению с турбулентным потоком в уравнении теплопереноса, приходим к свойству инвариантности поля температуры относительно подобного преобразования пространства. Основываясь на этом свойстве, может быть получена следующая формула для поля температуры, аналогичная формулам (2.309):

$$\langle \theta \rangle = A' \ln \eta^* + B', \qquad (2.331)$$

где A' = A = 2,5. Коэффициент B определим из условия на оси трубы:

$$B' = <\theta_0 > -2.5 \ln \text{Re}$$
 (2.332)

После подстановки (2.332) в (2.331) окончательно имеем:

$$<\theta>=<\theta_0>+2.5\ln(\eta^*/\text{Re})$$
 (2.333)

поле температуры вблизи стенки трубы и потоков необходимо определять с учетом теплофизических свойств жидкости (раздельно для жидкостей с числами Pr << 1 и Pr >> 1).

2.6.4.3 Теплоперенос при течении высокотеплопроводных и малотеплопроводных жидкостей

Высокотемпературные жидкости характеризуются величиной \Pr <<1 (расплавленные металлы). Для таких жидкостей $\sup(\eta_T^*,\eta_\Pi^*)=\eta_T^*$. Профиль температуры в области $\eta^*>\eta_T^*$ определяется по формуле (2.333). Остается найти поле температуры в области теплового слоя.

Для области $\eta^* < \eta_T^*$ выполняется неравенство $a_T/a < 1$, поэтому уравнение (2.324) упрощается:

$$\frac{d < \theta >}{d\eta^*} = \Pr$$
 (2.334)

После интегрирования уравнения (2.334) имеем:

$$<\theta>= \Pr \eta^* + C$$

Константу интегрирования определяем из условия на поверхности трубы (2.301): C = 0, поэтому последнее равенство принимает вид:

$$\langle \theta \rangle = \Pr \eta^*$$
 (2.335)

Окончательно поле температуры в случае течения высокотеплопроводной жидкости в трубе определяется следующей системой формул:

$$<\theta>=\begin{cases} \Pr \eta^{*}, \\ <\theta_{0}>+2,5\ln(\eta^{*}/\text{Re}), & \eta^{*}<\eta_{T}^{*}; \\ & \eta^{*}>\eta_{T}^{*}. \end{cases}$$
(2.336)

Учитывая условие непрерывности температуры на границе двух слоев, т.е. при $\eta^* = \eta_T^*$, из соотношения (2.336) получаем формулу для безразмерной температуры на оси трубы:

$$<\theta_{0}> = \frac{T_{0} - T_{\Pi}}{T^{*} - T_{\Pi}} = \Pr \eta_{T}^{*} - 2.5 \ln \left(\eta_{T}^{*} / \text{Re} \right)$$
 (2.337)

Формула (2.337) позволяет найти характерную разность температур T^*-T_{II} , введенную ранее для удобства. Далее определим безразмерный тепловой поток на стенку трубы Ki:

$$Ki = \frac{\langle q_0 \rangle x_0}{\lambda (T_0 - T_{II})},$$
(2.338)

где Ki - критерий Кирпичева, это отношение теплового потока, подводимого к стенке, к тепловому потоку, передаваемому через среду за счет теплопроводности . Используя выражение (2.318) для безразмерного потока тепла на стенку δ_0 , получаем:

$$Ki = \Pr \text{Re}/\langle \theta_0 \rangle. \tag{2.339}$$

Учитывая соотношение (2.337) и (2.328), а также связь между числами Рейнольдса

$$Re = Re_{cp} \sqrt{k_f} , \qquad (2.340)$$

запишем (2.339) в виде:

$$Ki = \frac{0.17 \,\text{Re}_{cp} \,\text{Pr} \,\sqrt{k_f}}{\lg \,\text{Re}_{cp} + \lg \,\text{Pr} + \lg\left(0.2\sqrt{k_f}\right) + 2.4},$$
(2.341)

где $\text{Re}_{cp} = u_{cp} x_0 / v$; u_{cp} — средняя скорость потока, определяемая экспериментально; k_f - коэффициент сопротивления. При выводе формулы (2.341) имеем b = 17,5.

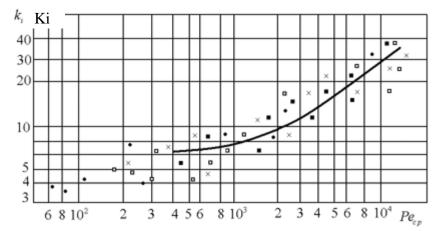


Рисунок 2.35 — Зависимость теплового потока от числа Пекле: сплошная линия — расчет (2.341); точки — эксперимент

Сопоставление результатов эксперимента, выполненного С.С. Кутателадзе с расчетными данными в соответствии с формулой (2.341), свидетельствует об удовлетворительном их согласовании при достаточно больших значениях числа Pe_{cp} $\Pr = Pe_{cp} \ge 4 \cdot 10^3$, когда имеет место развитой турбулентный режим течения (рис. 2.35). Малотеплопроводные жидкости характеризуются величиной числа $\Pr >> 1$. Для этих жидкостей $\sup \left(\eta_T^*, \eta_T^*\right) = \eta_T^*$. Поэтому профиль температуры в области $\eta^* > \eta_T^*$ определяется формулой (2.333). В соответствии с формулой (2.329) для таких жидкостей величина теплового слоя меньше динамического $\eta_T^* > \eta_T^*$. Для области $\eta^* < \eta_T^*$ молекулярный

теплоперенос преобладает над турбулентным $(a_T/a < 1)$, поэтому уравнение (2.325) примет вид:

$$\frac{d < \theta >}{d\eta^*} = \Pr$$

Решая последнее уравнение с учетом граничного условия на поверхности трубы (2.301), получаем:

$$\langle \theta \rangle = \operatorname{Pr} \eta^*, \quad \eta^* < \eta_T^*.$$
 (2.342)

В области $\eta_T^* \le \eta^* < \eta_\Pi^*$ справедливо неравенство: $a_T/a > 1$. Поэтому уравнение (2.315) запишем в виде:

$$\frac{a_T}{a} \frac{d < \theta >}{d\eta^*} = \Pr$$
(2.343)

Учитывая, что $a_T \sim v_T$, или $a_T = \beta v_T$, а также выражение (2.312) при $\eta^* < \eta_\Pi^*$, уравнение (2.333) запишем следующим образом:

$$\frac{d < \theta >}{d\eta^*} = \frac{\left(\eta^*\right)^{-4}}{3.3 \cdot 10^{-6} \,\beta} \,. \tag{2.344}$$

После интегрирования уравнения (2.344) имеем:

$$<\theta>=C-(9.9\beta)^{-1}10^{6}(\eta^*)^{-3}$$
 (2.345)

Постоянную интегрирования C рассчитываем из условия смыкания профилей температуры, определяемых формулами (2.342) и (2.345):

$$C = \Pr{\eta_T^* + \frac{10^6}{9.9\beta} \left(\frac{1}{\eta_T^*}\right)^3}$$

Тогда в области $\eta_{\scriptscriptstyle T}^* \leq \eta^* < \eta_{\scriptscriptstyle \Pi}^*$

$$<\theta>=\Pr\eta_T^* + \frac{10^6}{9.9\beta} \left(\eta_T^{*-3} - \eta^{*-3}\right).$$
 (2.346)

Окончательно поле средней температуры в турбулентном потоке малотеплопроводной жидкости определяется так:

$$<\theta> = \begin{cases} \Pr \eta^{*}, \\ \Pr \eta^{*}_{T} + \frac{10^{6}}{9.9\beta} (\eta^{*-3}_{T} - \eta^{*-3}), \\ <\theta_{0} > +2.5 \ln(\eta^{*}/\text{Re}), \end{cases} \qquad \eta^{*} < \eta^{*}_{T} \\ \eta^{*}_{T} \le \eta^{*} < \eta^{*}_{\Pi}. \qquad (2.347)$$

Следующий этап решения задачи связан с расчетом безразмерного теплового потока Ki на стенку трубы. Для этого в соответствии с формулой (2.339) необходимо найти величину $<\theta_0>$. Соблюдая неразрывность значений $<\theta>$ при переходе от вязкого к турбулентному слою, т.е. в точках $\eta^*=\eta_\Pi^*$ из соотношения (2.347) находим

$$<\theta_0> = \Pr \eta_T^* + \frac{10^6}{9.9\beta} (\eta_T^{*-3} - \eta_\Pi^{*-3}) - 2.5 \ln (\eta_\Pi^* / \text{Re})$$
(2.348)

Подставляя соотношение (2.348) в формулу (2.339), учитывая выражения (2.329) и величину $\eta_{\Pi}^* = 30$, имеем:

$$Ki = \frac{0.17 \,\text{Re}_{cp} \,\text{Pr} \,\sqrt{k_f}}{\lg \,\text{Re}_{cp} + \lg \left(0.2 \sqrt{k_f}\right) + 0.5 \,\text{Pr}^{3/4}}.$$
(2.349)

В формуле (2.349) учтено, что неизвестные эмпирические постоянные β и γ определены экспериментально. Сопоставление выражений для потоков тепла Ki в случае Pr <<1 (2.341) и Pr >>1 (2.349) позволило В.Г.Левичу получить интерполяционную формулу, справедливую для всех чисел Прандтля:

$$Ki = \frac{0.17 \operatorname{Re}_{cp} \operatorname{Pr} \sqrt{k_f}}{\lg \operatorname{Re}_{cp} + \lg \operatorname{Pr} + \lg \left(0.2 \sqrt{k_f}\right) + 2.4 + 0.5 \operatorname{Pr}^{3/4}}.$$
 (2.350)

2.7 Теплоотдача при поперечном обтекании труб

Процесс теплоотдачи при поперечном обтекании труб имеет ряд особенностей, которые объясняются гидродинамической картиной движения жидкости вблизи поверхности трубы.

Опыт показывает, что плавный безотрывный характер обтекания имеет место только при очень малых числах

Рейнольдса: Re<5. При значительно больших числах Re= w_0d/v , характерных для практики, обтекание трубы всегда сопровождается образованием в кормовой части вихревой зоны (рисунок 2.36).

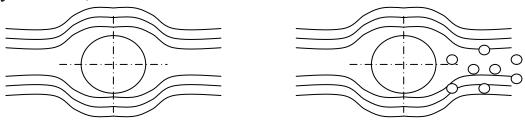


Рисунок 2.36 – Обтекание одиночной трубы

При этом характер и условия омывания передней (фронтовой) и задней (кормовой) половин цилиндра совершенно различны. На поверхности трубы образуется пограничный слой, который имеет наименьшую толщину в лобовой точке и далее постепенно нарастает в размерах (рисунок 2.37).

Развитие пограничного слоя вдоль периметра трубы

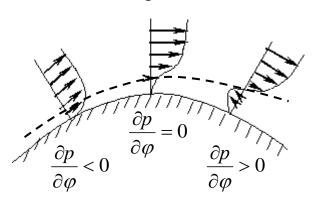


Рисунок 2.37 — Образование пограничного слоя на поверхности трубы

происходит в условиях переменной внешней скорости потока и переменного давления. Скорость слоев жидкости, примыкающих к внешней границе пограничного слоя, увеличивается вдоль периметра

трубы, а давление – в соответствии с уравнением Бернулли уменьшается

$$p_{z} + \rho_{z}gH + \frac{w_{z}^{2}\rho_{z}}{2} + \Delta p_{nom} = const.$$

При достижении точки периметра, отвечающей углу ϕ =90° (угол отсчитывается от лобовой точки), скорость достигает наибольших значений и далее начинает уменьшаться, что сопровождается соответствующим увеличением давления. В этой области слой становится неустойчивым, в нем возникает обратное течение, которое оттесняет поток от поверхности. В

итоге происходят отрыв потока и отрыв вихревой зоны, охватывающей кормовую часть трубы.

Положение точки отрыва пограничного слоя зависит

- от значения числа Re;
- степени турбулентности набегающего потока.

При малой степени турбулентности внешнего потока и относительно небольших числах Re течение в пограничном слое вплоть до точки отрыва имеет ламинарный характер. При этом местоположение зоны начала отрыва характеризуется углом $\phi=80-85^{\circ}$.

Если числа Re значительны, подтормаживание течения за счет роста давления приводит не к отрыву, а к переходу движения в слое в турбулентную форму.

Турбулентный пограничный слой обладает большей кинетической энергией, так как она дополнительно переносится в слой из внешнего потока за счет турбулентных пульсаций. В смещается резко результате место отрыва ПО потоку. Турбулентный слой отрывается при φ =120-140°. Смещение места отрыва приводит к уменьшению вихревой зоны за цилиндром, обтекание цилиндра улучшается.

Турбулентный пограничный слой появляется при $Re_{\kappa p}=1\cdot 10^5$ - $4\cdot 10^5$. На величину $Re_{\kappa p}$ существенно влияет степень турбулентности набегающего на цилиндр потока. Чем больше начальная турбулентность, тем при меньших значениях чисел Re появится пограничный турбулентный слой. Можно принять, что приближенно $Re_{\kappa p}=2\cdot 10^5$. Своеобразный характер омывания трубы отражается и на её теплоотдаче.

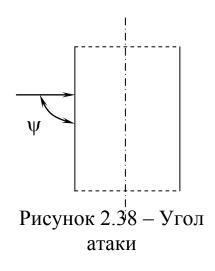
Падение коэффициента теплоотдачи на лобовой части трубы объясняется ростом толщины ламинарного пограничного слоя. Минимум теплоотдачи соответствует примерно месту отрыва слоя, кормовая часть цилиндра омывается жидкостью, имеющей сложный вихревой характер движения, которым и определяется значение теплоотдачи.

При малых числах Re теплоотдача кормовой части цилиндра невелика, с возрастанием числа Re она увеличивается и может сравняться с теплоотдачей лобовой части трубы.

В результате обобщения опытных данных было получено, что средний по окружности цилиндра коэффициент теплоотдачи описывается уравнениями

при
$$\operatorname{Re}_{\mathsf{ж}\mathsf{д}} \leq 1^{\cdot}10^{3}$$
 $\overline{N}u_{\mathsf{s}\mathsf{c}\mathsf{d}} = 0,56 \, Re_{\mathsf{s}\mathsf{c}\mathsf{d}}^{0,5} \cdot Pr_{\mathsf{s}\mathsf{c}}^{0,36} \left(\frac{Pr_{\mathsf{s}\mathsf{c}}}{Pr_{\mathsf{c}}}\right)^{0,25};$ для воздуха $\overline{N}u_{\mathsf{s}\mathsf{c}\mathsf{d}} = 0,49 \, Re_{\mathsf{s}\mathsf{c}\mathsf{d}}^{0,5};$ при $\operatorname{Re}_{\mathsf{k}\mathsf{d}} > 1^{\cdot}10^{3}$ $\overline{N}u_{\mathsf{s}\mathsf{c}\mathsf{d}} = 0,28 \, Re_{\mathsf{s}\mathsf{c}\mathsf{d}}^{0,6} \cdot Pr_{\mathsf{s}\mathsf{c}}^{0,36} \left(\frac{Pr_{\mathsf{s}\mathsf{c}}}{Pr_{\mathsf{c}}}\right)^{0,25};$ для воздуха $\overline{N}u_{\mathsf{s}\mathsf{c}\mathsf{d}} = 0,245 \, Re_{\mathsf{s}\mathsf{c}\mathsf{d}}^{0,6};$

При $Re>2.10^5$ теплоотдача цилиндра исследована недостаточно.



При вычислении чисел подобия за определяющий линейный размер принят внешний диаметр трубы, скорость, входящая в Re, берется в самом узком месте, за определяющую температуру берется средняя температура жидкости.

Формулы справедливы для случая, когда угол ψ , составленный направлением потока и осью трубы и называемый углом атаки, равен 90°. Если ψ <90°, теплоотдача уменьшается (рисунок 2.38).

При ψ =0 имеем продольное омывание трубки потоком

$$arepsilon_{\psi} = rac{lpha_{\psi}}{lpha_{\psi=90^{\circ}}}.$$

При ψ =30°..90° можно использовать приближенную зависимость: $\varepsilon_{_{\!\mathit{W}}}=1-0.54\cos^2\psi\,.$

Теплообменные устройства редко выполняются из одной поперечно омываемой трубы, так как поверхность теплообмена при этом невелика. Обычно трубы собирают в пучок. В технике чаще всего встречаются два основных типа трубных пучков: шахматный и коридорный (рисунок 2.39).

Характеристикой пучка является поперечный шаг S_1 (расстояние между осями труб в направлении, поперечном потоку жидкости) и продольный шаг S_2 (расстояние между осями соседних двух рядов труб, расположенных один за другим в направлении течения жидкости). Помимо S_1 и S_2 пучки характеризуются внешним диаметром труб по ходу жидкости.

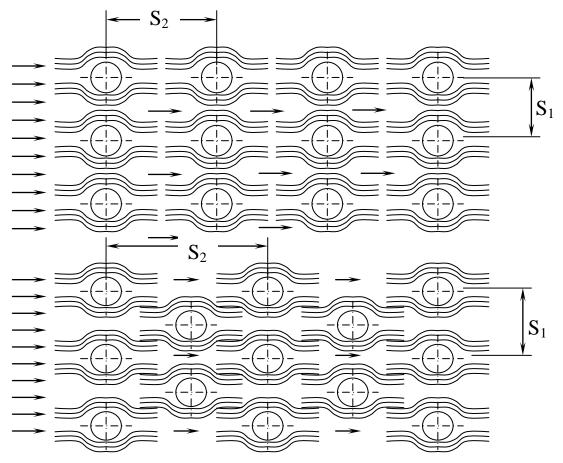


Рисунок 2.39 – Схемы пучков труб

Известны два основных режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. Форма течения жидкости в пучке во многом зависит от характера течения в канале перед пучком.

пучка течение В канале ДО установки ламинарным, то после установки все зависит от числа Re. В технике чаще встречается турбулентная форма течения в пучках. Однако и при турбулентном течении имеют место различные законы теплообмена. Это объясняется различным течением на стенках труб. Закон теплоотдачи изменяется при появлении на поверхности труб турбулентного пограничного слоя. Согласно опытам с одиночными трубами турбулентный пограничный слой появляется при $Re > 2.10^5$. Ha трубах стенке турбулентный пограничный слой может появиться при меньших числах Re (Re= 1.10^5). Скорость жидкости определяется в самом узком месте пучка, за определяющий размер принимается наружный диаметр трубы, за определяющую температуру средняя температура жидкости в пучке. Чисто ламинарный режим при числе $Re<10^3$, смешанный $Re=10^3...10^5$.

Наиболее изученным является смешанный режим.

Омывание первого ряда труб и шахматного и коридорного пучков аналогично омыванию одиночного цилиндра. Характер омывания остальных труб в сильной мере зависит от типа пучка. В коридорных пучках все трубы второго и последующих рядов находятся в вихревой зоне впереди стоящих труб, причем циркуляция жидкости в вихревой зоне слабая, так как поток в основном проходит в "коридорах". В коридорных пучках как лобовая, так и кормовая части трубок омываются со значительно меньшей интенсивностью, чем те же части одиночной трубки или лобовая часть трубки первого ряда в пучке.

В шахматных пучках характер глубоко омывания трубок качественно расположенных мало отличается OT омывания трубок первого ряда. В шахматных пучках максимум теплоотдачи остаётся в лобовой точке. При невысокой степени турбулизации набегающего потока теплоотдача первого ряда шахматного пучка составляет примерно 60 % от теплоотдачи третьего и последующих рядов, теплоотдача второго примерно 70 %. В коридорном пучке теплоотдача первого ряда так же составляет 60 % от теплоотдачи третьего и последующего рядов, а теплоотдача второго 90 %.На основе анализа и обобщения коэффициента ОПЫТНЫХ данных расчета среднего ДЛЯ теплоотдачи рекомендуются следующие соотношения:

а) коридорные пучки труб при $\text{Re} \le 10^3$

$$\overline{Nu}_{dm} = 0.56Re_{dm}^{0.5}Pr_{m}^{0.36}\left(\frac{Pr_{m}}{Pr_{c}}\right)^{0.25};$$

при Re>10³

$$\overline{Nu}_{dm} = 0.22 \operatorname{Re}_{dm}^{0.65} Pr_{m}^{0.36} \left(\frac{Pr_{m}}{\operatorname{Pr}_{c}}\right)^{0.25};$$

б) шахматные пучки труб при $Re \le 10^3$

$$\overline{Nu}_{udm} = 0.56 \operatorname{Re}_{dm}^{0.5} Pr_{m}^{0.36} \left(\frac{Pr_{m}}{\operatorname{Pr}_{c}}\right)^{0.25};$$

при Re>10³

$$\overline{Nu}_{dm} = 0.40 \operatorname{Re}_{dm}^{0.6} Pr_{m}^{0.36} \left(\frac{Pr_{m}}{\operatorname{Pr}_{c}}\right)^{0.25}.$$

Соотношения позволяют определить среднее значение коэффициента теплоотдачи для трубок третьего и всех

последующих рядов в пучках. Теплоотдача для первых двух рядов:

коридорного пучка $\alpha_1^k=0.6\alpha_3^k$; $\alpha_2^k=0.9\alpha_3^k$; шахматного пучка $\alpha_1^u=0.6\alpha_3^u$; $\alpha_2^u=0.7\alpha_3^u$; Для воздуха

а) коридорные пучки труб

при
$$\operatorname{Re}_{d \to c} \leq 10^3 \quad \overline{Nu}_{d \to c} = 0.49 \operatorname{Re}_{d \to c}^{0.5};$$

при
$$\operatorname{Re}_{d\infty} > 10^3 \quad \overline{Nu}_{d\infty} = 0,194 \operatorname{Re}_{d\infty}^{0,65};$$

б) шахматные пучки труб

при
$$\operatorname{Re}_{d\infty} \le 10^3$$
 $\overline{Nu}_{d\infty} = 0,49 \operatorname{Re}_{d\infty}^{0,5};$

при
$$\operatorname{Re}_{d \to c} > 10^3$$
 $\overline{Nu}_{d \to c} = 0.35 \operatorname{Re}_{d \to c}^{0.60}$.

Для определения коэффициента теплоотдачи всего пучка в целом необходимо произвести осреднение средних значений $\bar{\alpha}$, полученных для отдельных рядов

$$\overline{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_{i} \cdot F_{i}}{\sum_{i=1}^{n} F_{i}} = \frac{\overline{\alpha}_{i} F_{i} + \overline{\alpha}_{2} F_{2} + \sum_{i=3}^{n} \overline{\alpha}_{3} F_{i}}{\sum_{i=1}^{n} F_{i}}; \qquad (2.351)$$

где $\overline{\alpha}_i$ – средний коэффициент теплоотдачи і-го ряда;

 $F_{\rm i}$ — суммарная поверхность теплообмена трубок i-го ряда; n — число рядов в пучке.

Если $F_1 = F_2 = ... = F_n$, то формула упрощается

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + (n-2)\overline{\alpha}_3}{n}.$$
 (2.352)

Когда угол атаки ψ \neq $90^{\rm o}$, изменение теплоотдачи может быть учтено путем введения коэффициента. $\varepsilon_{\Psi}=\overline{\alpha}_{\Psi}/\overline{\alpha}_{\Psi=90^{\rm o}}$

Значение ϵ_{ψ} для пучков из круглых труб можно взять по таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Значения поперечного коэффициента ε_{w}

Ψ	90	80	70	60	50	40	30	20	10
£ ₁₁ ,	1	1	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

3 ТЕПЛООТДАЧА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ

Конденсация представляет собой процесс перехода пара (газа) в жидкое или твердое состояние. При конденсации происходит выделение тепла фазового перехода, поэтому процесс конденсации связан с теплообменом.

Количество тепла, которое выделяется при конденсации пара, можно определить по зависимости

$$Q^* = rG, B_T, \tag{3.1}$$

где r — теплота парообразования, Дж/кг;

G – расход пара ,кг/с.

Конденсация пара происходит, когда температура поверхности меньше температуры насыщения пара при данном давлении. При этом на поверхности теплообмена может образоваться пленка конденсата.

При этом различают два вида конденсации: капельную, когда конденсат осаждается в виде отдельных капель, и пленочную, когда на поверхности образуется сплошная пленка жидкости.

Капельная конденсация возможна в том случае, если конденсат не смачивает поверхность охлаждения.

Эффект смачивания связан с действием сил поверхностного натяжения.

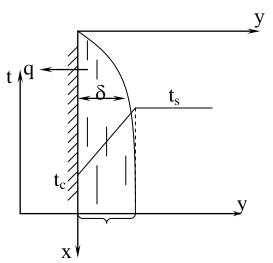


Рисунок 3.1 – Образование пленки конденсата

3.1 Теплоотдача при пленочной конденсации пара

В процессе пленочной конденсации все тепло, выделяющееся на внешней границе пленки, отводится к поверхности охлаждения. При ламинарном движении жидкостной пленки перенос тепла через неё осуществляется лишь путем теплопроводности (рисунок 3.1).

Если принять, что температура частиц конденсата, соприкасающихся с паром, равна температуре насыщения, то поток тепла, переданный единице поверхности, определяется выражением

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_s - t_c),$$

где λ – коэффициент теплопроводности конденсата, $BT/(M \cdot K)$;

 δ – толщина пленки, м;

 $t_{\rm c}$ – температура поверхности, °С.

С другой стороны количество переданного тепла можно определить по формуле Ньютона

$$q = \alpha (t_s - t_c),$$

откуда $\alpha = \lambda/\delta$.

Определение коэффициента теплоотдачи сводится к определению толщины пленки δ

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\lambda_s(t_s - t_c)v_s x}{rg(\rho' - \rho'')}}; \quad \alpha = \frac{\lambda}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{\lambda_s^3 rg(\rho' - \rho'')}{4(t_s - t_c)v_s x}}, \quad (3.2),$$

где $\lambda_{\rm s}$ – коэффициент теплопроводности конденсата, $Bm/(m\cdot K)$,

 $t_{\rm s}$ – температура насыщения, °С;

 v_{s} – кинематический коэффициент вязкости, m^{2}/c ;

r – теплота парообразования, Дж/кг;

g – ускорение свободного падения, м/ c^2 ;

 ρ ' – плотность жидкости, кг/м³;

 ρ '' – плотность пара, кг/м³.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи для вертикальной стенки или трубы высотой h определяют формулой

$$\overline{\alpha}_h^* = 0.943 \frac{A}{\sqrt[4]{h \cdot \Delta t}},\tag{3.4}$$

где
$$\Delta t = t_{\rm s} - t_{\rm c}; \ A = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 rg(\rho' - \rho'')}{v}}.$$

Если стенка наклонена под углом ψ к горизонту, то расчетная формула теплоотдачи принимает вид

$$\alpha_{\psi} = \alpha_{eepm} \sqrt[4]{\sin \psi}$$
.

Нуссельтом была получена зависимость для определения среднего коэффициента теплоотдачи для горизонтальной трубы

$$\alpha_d^* = 0.728 \frac{A}{\sqrt[4]{D \cdot \Delta t}},\tag{3.5}$$

где D — диаметр трубы.

Расчет теплоотдачи при конденсации пара на горизонтальной трубе целесообразно проводить по формуле (3.5) Нуссельта при введении поправки, учитывающей зависимость теплофизических свойств от температуры.

$$\overline{\alpha}_d = \overline{\alpha}_h^* \varepsilon_t, \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_{t} = \left[\left(\frac{\lambda_{c}}{\lambda_{s}} \right)^{3} \frac{\mu_{s}}{\mu_{c}} \right]^{\frac{1}{8}}, \tag{3.7}$$

где µ - динамический коэффициент вязкости, Па∙с

На поверхности вертикальных пластин и труб интенсивность теплоотдачи, как показывают опытные данные, выше, чем вычисленная по формуле (3.6). Это объясняется тем, что течение конденсатных пленок приобретает волновой характер.

$$\varepsilon_{v} = (\text{Re}/4)^{0.04},$$

где Re – число Рейнольдса конденсатной пленки.

$$\operatorname{Re}_{s} = 4\frac{G}{\mu}; \quad \operatorname{Re}_{s} = 4\frac{\overline{q} \cdot h}{r \cdot \mu}; \quad \operatorname{Re}_{s} = 4\frac{\overline{\alpha} \cdot \overline{\Delta t} \cdot h}{r \cdot \mu},$$

где G — массовый расход жидкости, приходящийся на единицу длинны поверхности, кг/(м·с).

При Re \leq 4, ϵ_v =1, так как волновое течение пленки отсутствует;

при Re=100, ε_{v} =1.14;

при Re=400, ε_{v} =1.2;

при Re=1600, ε_v =1.27.

С учетом поправки $\varepsilon_{\rm v}$ на волновой режим расчетное соотношение для теплоотдачи при конденсации пара на поверхности вертикальных труб и плит имеет вид

$$\overline{\alpha}_h = \overline{\alpha}_h^* \varepsilon_v \varepsilon_t, \tag{3.8}$$

где α_h — коэффициент теплоотдачи, определяемый по формуле (3.4) при определении всех физических свойств при температуре насыщения t_s .

При большой высоте вертикальной поверхности и значительных температурных напорах расход конденсата может возрасти настолько, что возникает турбулентный режим течения пленки. Исследования показали, что турбулентное течение свободно стекающих конденсатных пленок наступает обычно при

значениях Re, больших некоторого критического значения: $Re_{\kappa p} \approx 1600$.

На рисунке 3.2.а показана картина течения конденсатной пленки вдоль вертикальной стенки большой высоты. При некотором значении $h_{\rm kp}$ число Рейнольдса достигает критического значения ${\rm Re}_{\rm kp.}$ Далее течение конденсата в пленке принимает турбулентный характер. При турбулентном течении локальная интенсивность теплоотдачи растет при увеличении расхода G и числа Re по соотношению

$$\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{v^2}{g} \frac{\rho^1}{\rho^1 - \rho^{11}} \right)^{1/3} = 0,023 \,\text{Re}^{0,25} \,\text{Pr}^{0,5},$$

что объясняется возрастанием интенсивности турбулентного перемешивания жидкости в пленке. Характер изменения теплоотдачи вдоль вертикальной поверхности большой протяженности показан на рисунке 3.26.

Значения $(h\Delta t)_{\kappa p}$, при которых возникает турбулентный режим течения в пленке, определяется соотношением

$$(h\Delta t)_{\kappa\rho} = 2300 \frac{r\mu_s}{\lambda} \left(\frac{v_s^2}{g} \frac{\rho^{\mathrm{I}}}{\rho^{\mathrm{I}} - \rho^{\mathrm{II}}} \right)^{\frac{1}{3}}, \tag{3.9}$$

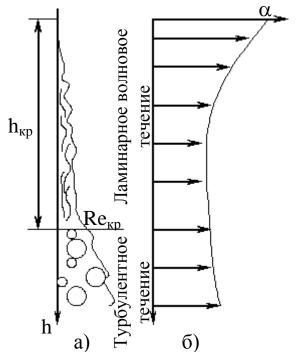


Рисунок 3.2 – Изменение характера движения пленки и величины коэффициента теплоотдачи

которое показывает, что величина $(h\Delta t)_{\kappa p}$ зависит от физических свойств конденсата и ускорения свободного падения.

По уравнению можно рассчитать величины $(h\Delta t)_{\kappa p}$ и для любой другой жидкости.

При наличии на вертикальной поверхности участка с турбулентным режимом течения конденсата в пленке расчет средней теплоотдачи производить уже неправомерно. Для этих условий расчетная формула для определения

среднего по всей поверхности коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$\overline{\alpha}_h = 400 \frac{r\mu_s}{h\Delta t} \left\{ 1 + 0.625 \operatorname{Pr}_s^{0.5} \left[\frac{h\overline{\Delta}\overline{t}}{\left(h\overline{\Delta}\overline{t}\right)_{kp}} - 1 \right] \right\}^{4/3}, \quad (3.10)$$

где $\overline{\Delta} \bar{t} = t_s - \bar{t}_c$; \bar{t}_c – средняя по периметру трубы температура поверхности.

При пленочной конденсации сухого насыщенного пара на горизонтальных трубах средний по периметру коэффициент теплоотдачи можно определить по следующей формуле $Re=3,25Z^{0,75},$

(3.11)

где
$$\operatorname{Re} = \alpha \Delta t \pi R \frac{4}{r \rho v};$$
 (3.12)

$$Z = \Delta t \pi R \left(\frac{g}{v^2}\right)^{1/3} \frac{\lambda}{r\rho v} - \text{приведенная длина трубы;}$$
 (3.13)

 $\Delta t = t_s - t_c$ – температурный напор;

R – радиус трубы;

λ, ν и ρ – коэффициент теплопроводности, кинематической вязкости и плотность конденсата при температуре насыщения t_s; r — теплота парообразования при t_s .

Формула справедлива при $D < 20* \left(\sigma/\rho_{QQ}\right)^{0.5}$ и ламинарном

течении пленки конденсата, что определяется условием Z<3900

$$\alpha = 3.25 \frac{A^{0.75}}{B} \cdot \frac{1}{(\Delta t \pi R)^{0.25}},$$
(3.14)

где
$$A = \left(\frac{g}{v^2}\right)^{1/3} \frac{\lambda}{r\rho v} \quad \frac{1}{M \cdot K}; \quad B = \frac{4}{r\rho v} \quad \frac{M}{BT}.$$

При пленочной конденсации сухого насыщенного пара и ламинарном режиме течения пленки конденсата на вертикальных трубах средний коэффициент поверхностях И ПО длине теплоотдачи можно определить по следующей формуле

Re=3,8
$$Z^{0,78}$$
; $Re = \alpha \Delta t h \frac{4}{r\rho v}$; $Z = \Delta t h \left(\frac{g}{v^2}\right)^{1/3} \frac{\lambda}{r\rho v}$.

Формула справедлива при Re<1600 и следовательно Z<2300

$$Z = \Delta t h \cdot A; \tag{3.15}$$

$$\alpha = \frac{Re}{\Delta t \cdot h \cdot B} = 3.8 \frac{(\Delta t \cdot h \cdot A)^{0.78}}{\Delta t h \cdot B}.$$
 (3.16)

3.2 Теплоотдача при конденсации пара в трубах

Если в трубу с охлаждающей поверхностью подводится пар, то по мере прохождения по трубе пар постепенно конденсируется и на стенках образуется пленка конденсата. При этом расход пара G" и его скорость W" падают по длине трубы, а расход конденсата G увеличивается. Основной особенностью процесса конденсации в трубах является наличие динамического взаимодействия между паровым потоком и плёнкой. На пленку конденсата действует так же сила тяжести. В итоге в зависимости от ориентации трубы в пространстве и скорости пара характер движения конденсата может быть различным.

В вертикальных трубах при движении пара сверху вниз силы тяжести и динамического воздействия парового потока совпадают по направлению и пленка конденсата стекает вниз. В коротких трубах при небольшой скорости парового потока определяется течение пленки основном силой В тяжести конденсации неподвижного случаю пара вертикальной стенке. При увеличении скорости интенсивность теплоотдачи растет. Это объясняется уменьшением толщины конденсатной пленки, которая под воздействием парового потока течет быстрее. В длинных трубах при больших скоростях движения пара картина процесса усложняется. В этих условиях наблюдается частичный срыв жидкости с поверхности пленки и образование парожидкостной смеси в ядре потока. При этом влияние силы тяжести постепенно утрачивается, закономерности процесса перестают зависеть от ориентации трубы в пространстве.

В горизонтальных трубах при не очень больших скоростях парового потока взаимодействие сил тяжести и трения пара о пленку приводит к иной картине течения. Под влиянием силы тяжести пленка конденсата стекает по внутренней поверхности трубы вниз. Здесь конденсат накапливается и образует ручей. На это движение накладывается движение конденсата в продольном направлении под воздействием парового потока. В итоге интенсивность теплоотдачи оказывается переменной по окружности трубы: в верхней части более высокая, чем в нижней.

Из-за затопления нижней части сечения горизонтальной трубы конденсатом средняя интенсивность теплоотдачи при небольших скоростях пара может оказываться даже более низкой, чем при конденсации неподвижного пара снаружи горизонтальной трубы того же диаметра.

При конденсации в трубах различают режимы полной и частичной конденсации пара. В первом случае весь поступающий в трубу пар конденсируется целиком, и на выходе из трубы движется сплошной поток конденсата. При частичной конденсации на выходе из трубы течет парожидкостная смесь.

Поэтому полный расход пара и конденсата G по длине трубы не изменяется, уравнение материального баланса для любого поперечного сечения трубы имеет вид

$$G''+G'=G=const$$

Отношение расхода пара G'', проходящего через данное сечение трубы, к полному расходу G называют расходным массовым паросодержанием двухфазного потока в этом сечении; его принято обозначать символом x

$$x=G''/G$$
.

Так, если на вход в трубу поступает насыщенный пар, то во входном сечении расходное массовое паросодержание равно единице $(x_1=1)$. При подаче в трубу влажного пара расходное массовое паросодержание на входе меньше единицы $(x_1<1)$. По мере движения потока по трубе в следствие конденсации содержание пара уменьшается. При полной конденсации пара в выходном сечении $x_2=0$, при частичной $x_2>0$.

Уравнение теплового баланса для элемента трубы dl имеет следующий вид

$$q\pi Ddl = rdG',$$

где q – плотность теплового потока в данном сечении трубы.

Если уравнение проинтегрировать по длине от 0 до l, то получим уравнение теплового баланса для всей трубы

$$\overline{q}\,\pi Dl = rG'(x_1 - x_2),$$

где \overline{q} — средняя по длине плотность теплового потока; x_1 и x_2 — входное и выходное массовые паросодержания потока.

Из последнего уравнения видно, что суммарный массовый расход пара и конденсата G, проходящий через трубу, однозначно связан с тепловой нагрузкой, размерами трубы и значениями расходного массового паросодержания потока на

входе и выходе из канала. При этом, чем выше тепловая нагрузка \overline{q} и чем длиннее труба, тем выше должны быть расходы и скорость потока в трубе.

В этих условиях течение конденсатной пленки в основном определяется динамическим воздействием со стороны парового потока, причем на большей части длины (за исключением начального участка) режим движения конденсата в пленке носит турбулентный характер. Происходящий при этом интенсивный срыв жидкости с пленки в поток и обратный перенос капелек жидкости из ядра потока на пленку способствует процессу турбулентного перемешивания конденсата внутри пленки. Расчет теплоотдачи в этих случаях следует производить по формуле

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{\rho'/\rho_m} \,, \tag{3.17}$$

где α_0 – коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по формуле

$$Nu_{dm} = 0.021 \operatorname{Re}_{dm}^{0.65} \cdot \operatorname{Pr}_{m}^{0.43} \left(\operatorname{Pr}_{m} / \operatorname{Pr}_{c} \right)^{0.25} \varepsilon_{l}$$
(3.18)

при турбулентном движении жидкости (конденсата) в трубе с расходом G;

 $ho_{\rm m}$ — средняя плотность парожидкостной смеси в данном сечении трубы.

За определяющую температуру принята средняя температура жидкости, за определяющий размер — эквивалентный диа-

метр
$$d_{\mathfrak{I}} = 4\frac{F}{\Pi_1}$$
, ε_l – учитывает изменение среднего

коэффициента теплоотдачи по длине трубы.

Если
$$\frac{l}{d} \ge 50$$
, $\varepsilon_l = 1$ при $\frac{l}{d} < 50$, ε_l определяют по таблице 2.2

Соотношение (д) определяет локальную интенсивность теплоотдачи для данного сечения канала. В конце участка конденсации средняя плотность парожидкостной смеси $\rho_{\rm m} = \rho^1$ и $\alpha \to \alpha_{\rm o}$. При заданном расходном массовом паросодержании x отношение плотностей жидкости и пароводяной смеси, входящее в уравнение (д) можно выразить формулой

$$\frac{\rho'}{\rho_m} = 1 + \frac{\rho' - \rho''}{\rho''} x. \tag{3.19}$$

Средний коэффициент теплоотдачи по всей длине трубы определяется соотношением

$$\frac{\overline{\alpha}}{\alpha_0} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\rho'}{\rho_m}\right)_1} + \sqrt{\left(\frac{\rho'}{\rho_m}\right)_2} \right], \tag{3.20}$$

где величины $\frac{\rho'}{\rho_{\scriptscriptstyle m}}$, рассчитанные по уравнению (3.19), относятся соответственно к входному и выходному сечению трубы.

3.3 Влияние перегрева пара

Если температура стенки ниже температуры насыщения, то процесс конденсации перегретого пара протекает так же, как и

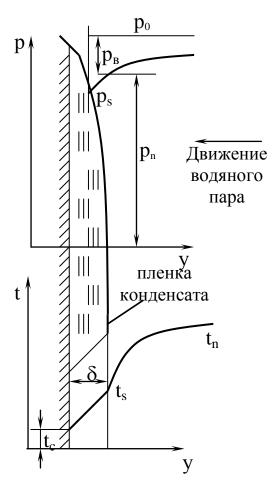


Рисунок 3.3 – Характер конденсации перегретого пара

насыщенного. Конечно, это не значит, что перегретый пар сразу становится насыщенным во всем объеме; насыщенным пар становится лишь у стенки по мере его охлаждения, а вдали от стенки он может и будет оставаться перегретым (рисунок 3.3).

При конденсации перегретого пара необходимо учитывать теплоту перегрева.

$$q''_n = i''_n - i''_s$$
, Дж/кг

и вместо теплоты фазового перехода r в расчетную формулу подставлять значение

$$r'=r+q_n'',$$

где i_n'' и i_s'' — энтальпия перегретого и насыщенного пара соответственно. За разность температур при этом попрежнему принимается $\Delta t = t_s - t_c$.

Так как r > r, то при конденсации перегретого пара, теплоотдача несколько выше, чем при конденсации насыщенного пара. Однако разница обычно незначительна и в практических расчетах ею часто можно пренебрегать.

3.4 Общие представления о процессе кипения

Кипением называется процесс образования пара внутри объема жидкости. Условия протекания этого процесса своеобразны и сложны.

При некотором определенном значении температуры, зависящем от величины давления, при котором происходит нагревание, вода закипит и начнется процесс парообразования, т.е. будет образовываться пар, имеющий ту же температуру, что и кипящая вода. Пар над жидкостью в таком состоянии называется насыщенным.

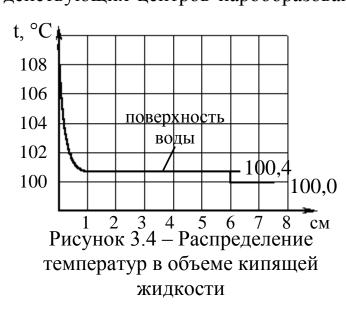
Для возникновения кипения всегда необходим некоторый перегрев жидкости, т.е. превышение температуры жидкости $t_{\rm w}$ относительно температуры насыщения $t_{\rm s}$ при заданном давлении р. Этот перегрев, как показывает опыт, зависит от физических свойств жидкости, ее чистоты, давления, а также свойств граничных твердых поверхностей. Чем чище жидкость, тем более высоким оказывается начальный перегрев, необходимый для возникновения кипения. Известны опыты, в которых тщательно очищенные жидкости, лишенные растворенных газов, удавалось нагревать без вскипания на десятки градусов при нормальном давлении. Однако, в конце концов такая перегретая жидкость все причем кипение происходит крайне вскипает, напоминая взрыв. Теплота перегрева жидкости расходуется на парообразование, жидкость быстро охлаждается до температуры насыщения. Высокий начальный перегрев, необходимый для жидкости, объясняется чистой затрудненностью вскипания самопроизвольного образования внутри жидкости начальных маленьких пузырьков пара (зародышей) из-за значительной энергии взаимного притяжения молекул в жидкости.

Иначе обстоит дело, если жидкость содержит растворенный газ (например, воздух), а также мельчайшие взвешенные частицы. При ее нагревании процесс кипения начинается почти сразу после достижения жидкостью температуры насыщения. При этом кипение носит спокойный характер. В данном случае образующиеся при нагревании газовые пузырьки, а также находящиеся в жидкости твердые частицы, служат готовыми начальными зародышами паровой фазы.

Начальный перегрев снижается и в том случае, когда стенки сосуда, в котором происходит нагревание жидкости, имеют

адсорбированный на поверхности газ, микрошероховатость, а также различные неоднородности и включения, понижающие молекулярное сцепление жидкости с поверхностью. При подводе тепла через эту поверхность образование пузырьков наблюдается в отдельных точках поверхности, так называемых центрах парообразования. Таким образом, процесс кипения в этом случае начинается в слоях жидкости, контактирующих с поверхностью и имеющих одинаковую с ней температуру. Для практики этот вид кипения представляет наибольший интерес. Рассмотрим его основные характеристики.

По мере увеличения температуры поверхности нагрева $t_{\rm c}$ и соответственно температурного напора $\Delta t = t_{\rm c} - t_{\rm s}$ число действующих центров парообразования растет, процесс кипения



становится все более Паровые интенсивным. периодически пузырьки отрываются OT поверхности и, всплывая к поверхности, свободной продолжают расти объеме. Последнее объясняется тем, что температура В объеме кипящей жидкости, как показывают опытные данные, не равна

температуре насыщения, а несколько превышает ее. Например, для воды при атмосферном давлении перегрев в объеме составляет 0,2...0,4°C (рисунок 3.4).

При повышении температурного напора Δt значительно возрастает поток тепла, который отводится от поверхности нагрева к кипящей жидкости. Все это тепло в конечном счете расходуется на образование пара. Уравнение теплового баланса при кипении имеет вид

$$Q = r \cdot G'', \quad \text{BT} \tag{3.21}$$

где Q – поток тепла, Вт;

r – теплота парообразования жидкости, Дж/кг;

G'' – количество пара, образующееся в результате кипения жидкости и отводимое от её свободной поверхности, кг/с.

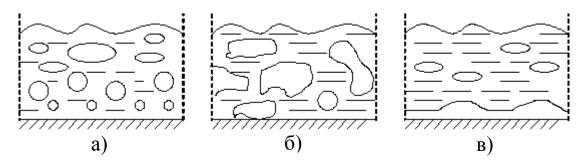


Рисунок 3.5 – Режимы кипения жидкости

Тепловой поток Q при увеличении температурного напора Δt растет не беспредельно. При некотором значении Δt он максимального значения, при дальнейшем достигает повышении Δt начинает уменьшаться. До момента достижения максимального теплового потока режим кипения (рисунок 3.5a), пузырьковым максимальную тепловую aкипении перегрузку при пузырьковом называют первой критической плотностью теплового потока и обозначают $q_{\rm kpl}$ (рисунок 3.6). Для воды при атмосферном давлении первая критическая плотность теплового потока составляет $q_{\text{кpl}} \approx 1,2 \cdot 10^6$ Вт/м², соответствующее критическое значение температурного напора $\Delta t_{\text{кp1}}$ =25...35°C (рисунок 3.6). Эти величины относятся к условиям кипения воды при свободном движении в большом объеме.

При больших значениях Δt наступает второй, *переходный* режим кипения (рисунок 3.5б). Он характеризуется тем, что как на самой поверхности нагрева, так и вблизи ее пузырьки между образуются непрерывно сливаются собой, большие паровые полости. Из-за этого доступ жидкости поверхности постепенно все более затрудняется. В отдельных местах поверхности возникают «сухие» пятна; их число и размеры непрерывно растут по мере увеличения температуры поверхности. Такие участки как бы выключаются теплообмена, так как отвод тепла непосредственно к пару происходит существенно менее интенсивно. Это и определяет резкое снижение теплового потока и коэффициента теплоотдачи в области переходного режима кипения.

Наконец, при некотором температурном напоре вся поверхность нагрева обволакивается сплошной пленкой пара,

оттесняющей жидкость от поверхности. Наступает третий *пленочный* режим кипения (рисунок 3.5в). Перенос тепла в режиме пленочного кипения от поверхности кипения к жидкости осуществляется путем конвективного теплообмена и излучения через паровую пленку. По мере увеличения температурного на-

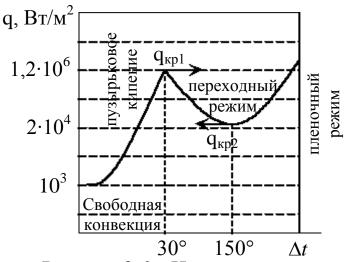


Рисунок 3.6 – Изменение плотности теплового потока в зависимости от режимов кипения

пора все большая часть теплоты передается за излучения. Интенсивность теплообмена В режиме пленочного кипения достаточно низкая. Паровая пленка испытывает пульсации; периодически пар, накапливающийся ней, отрывается в виде пузырей. больших наступления момент пленочного кипения

тепловая нагрузка, отводимая от поверхности и соответственно количество образующегося пара имеют минимальные значения.

Минимальное значение тепловой нагрузки при пленочном второй критической называется плотностью кипении *теплового потока q_{\kappa p2}* (рисунок 3.6). При атмосферном давлении для воды, кипящей на технических металлических поверхностях, характеризуется момент начала пленочного кипения $\Delta t = t_e - t_s = 150^{\circ} \text{C},$ напором т.е. температура температурным поверхности стенки составляет примерно t_c =250°C.

Все эти три режима можно наблюдать в обратном порядке, если, например, раскаленное металлическое изделие опустить в воду для закалки. Вода закипает, вначале охлаждение тела идет медленно (пленочное кипение), затем скорость охлаждения быстро нарастает (переходной режим), вода начинает периодически смачивать поверхность, и наибольшая скорость снижения температуры поверхности достигается в конечной стадии охлаждения (пузырьковое кипение). В этом примере кипение протекает в нестационарных условиях во времени. При постепенном повышении тепловой нагрузки q (рисунок 3.6.)

температурный напор Δt возрастает в соответствии с линией пузырькового режима кипения и процесс развивается также, как это было описано выше. Новые условия возникают тогда, когда подводимая плотность теплового потока достигает значения, которое соответствует первой критической плотности теплового потока $q_{\rm KD1}$. Теперь при любом незначительном (даже случайном) повышении величины q возникает избыток между количеством подводимого к поверхности тепла и той максимальной тепловой нагрузкой $q_{\text{кр1}}$, которая может быть отведена в кипящую жидкость. Этот избыток увеличение $(q-q_{\kappa n1})$ вызывает температуры поверхности, T.e. начинается нестационарный стенки. Температура поверхности разогрев материала оказывается более высокой по сравнению с $t_{\rm ckp1}$, на поверхности устанавливается переходный режим кипения, и отвод тепла начинает снижаться. В итоге разность между подводимым и отводимым количеством тепла быстро нарастает во времени. Соответственно увеличивается скорость разогрева поверхности. Развитие процесса приобретает кризисный характер. За доли секунды температура материала поверхности нагрева возрастает на сотни градусов и лишь при условии, что стенка достаточно тугоплавкая, кризис заканчивается благополучно стационарным состоянием, отвечающим области пленочного высокой температуре поверхности. На кипения при весьма рисунке 6.3 этот кризисный переход от пузырькового режима кипения к пленочному условно показан стрелкой как "перескок" с кривой пузырькового кипения на линию пленочного кипения при той же тепловой нагрузке $q_{\rm kpl}$. Однако обычно кризис сопровождается перегревом, расплавлением и разрушением поверхности нагрева.

Вторая особенность состоит в том, что если произошел кризис и установился пленочный режим кипения, то при снижении тепловой нагрузки пленочное будет кипение сохраняться, т.е. обратный процесс будет происходить по линии Лишь при достижении $q_{\kappa p2}$ пленочного кипения. начинает вновь в отдельных точках периодически смачивать поверхность нагрева. Отвод тепла растет и превышает подвод быстрое вследствие возникает чего охлаждение поверхности, которое кризисный также характер. носит Происходит быстрая устанавливается смена режимов, И

стационарное пузырьковое кипение. Этот обратный переход (второй кризис) также условно показан как "перескок" с кривой пленочного кипения на линию пузырькового кипения при $q=q_{\rm kp2}$.

Для процесса кипения жидкости в трубе, отмеченные условия остаются в силе, но вместе с тем появляется ряд новых особенностей. На развитие процесса влияет скорость вынужденного движения жидкости или пароводяной смеси, характер распределения паровой и жидкой фаз внутри канала.

Процесс кипения может происходить при течении в трубе недогретой температуры до насыщения жидкости, интенсивность подвода тепла к стенке трубы достаточно высока. Такой процесс возникает, когда температура стенки t_c превышает температуру насыщения $t_{\rm s}$, он охватывает пограничный слой жидкости около стенки. Паровые пузырьки попадающие в холодное ядро потока быстро конденсируются. Этот вид кипения пограничном кипением называют В слое ИЛИ кипением недогретой жидкости.

Отвод теплоты в режиме пузырькового кипения является одним из наиболее совершенных методов охлаждения поверхности нагрева. Он находит широкое применение в атомных реакторах, при охлаждении реактивных двигателей.

На практике широко применяются методы отвода теплоты при кипении жидкости, движущейся внутри труб или каналов различной формы. Так процессы генерации пара на современных тепловых электрических станциях осуществляются за счет кипения воды, движущейся внутри котельных труб при высоком давлении.

3.5. Теплообмен при пузырьковом кипении жидкости в большом объеме при свободной конвекции

Для возникновения пузырьков всегда необходим некоторый перегрев, который зависит от физических свойств жидкости и от состояния твердой поверхности, давления, чистоты жидкости и других факторов.

Образование пузырьков пара происходит в отдельных точках жидкости, которые называются центрами парообразования. По мере увеличения температурного напора число действующих центров парообразования растет. Паровые

пузырьки периодически отрываются от поверхности, и, всплывая, продолжают расти в объеме.

Заметное влияние на число центров парообразования оказывают различные налеты, окисные пленки, а также любые другие включения, приводящие к понижению работы адгезии.

Под работой адгезии понимают работу, которую необходимо затратить для отрыва жидкости от твердой поверхности на единице площади.

На условие образования паровых пузырьков большое влияние оказывает поверхностное натяжение на границе раздела жидкости и пара.

Поверхностным натяжением называется сила, под действием которой свободная поверхность стремиться сократиться.

Вследствие поверхностного натяжения давление пара внутри пузырька p_{π} выше давления окружающей его жидкости p_{π} . Их разность определяется уравнением Лапласа:

$$\Delta p = p_n - p_{xc} = 2\sigma/R. \tag{3.22}$$

Зависимость давления пара в пузырьке от его размера накладывает особенности на условие теплового и термодинамического равновесия. Пар в пузырьке и жидкость на его поверхности находятся в равновесии, если поверхность жидкости имеет температуру равную температуре насыщения при давлении пара в пузырьке.

Следовательно, для существования теплового равновесия жидкость вокруг пузырька должна быть перегрета на величину

$$t_s(p_n)-t_s(p_{\mathcal{H}}).$$

При пузырьковом кипении жидкости в большом объёме коэффициент теплоотдачи может быть посчитан по формуле

при заданной плотности теплового потока

$$Nu_* = 0,125 \,\mathrm{Re}_*^{0,65} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}$$
 при $\mathrm{Re}_* > 10^{-2}$;

$$Nu_* = 0.0625 \,\mathrm{Re}_*^{0.5} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}$$
 при $\mathrm{Re}_* < 10^{-2}$,

где
$$\operatorname{Re}_* = \frac{ql_*}{rp''v}$$
 $\operatorname{Re}_* = \frac{w_{\kappa un} \cdot l_*}{v}$ $w_{\kappa un} = \frac{q}{r\rho''}$.

Через температурный напор

$$Nu_* = 3.91 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' \nu} \right) \Pr^{2/3}$$
 при $\frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' \nu} \cdot \Pr^{1/3} < 1.6$;

$$Nu_* = 2,63 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' v} \right)^{1,86} \Pr^{0,952}$$
 при $\frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' v} \cdot \Pr^{1/3} \ge 1,6$;
$$Nu_* = \frac{\alpha \cdot l_*}{\lambda}; \quad \Pr = \frac{v}{a}; \quad l_* = \frac{c_p \rho' \sigma Ts}{\left(r \rho''\right)^2}.$$

Формулы справедливы при $0.86 \le Pr \le 7.6$; $10^{-5} \le Re \le 10^4$; давлении от $45 \cdot 10^2$ до $175 \cdot 10^5$ Па;

$$0.05 \leq \frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' \nu} \operatorname{Pr}^{1/3} \leq 200,$$

где v – кинематический коэффициент вязкости, m^2/c ;

 $c_{\rm p}$ – теплоемкость, Дж/(кг·К);

r – теплота парообразования,Дж/кг;

 λ – коэффициент теплопроводности, Bт/(мK);

a – коэффициент температуропроводности, m^2/c ;

 σ – коэффициент поверхностного натяжения, H/м;

 ρ ' и ρ " – плотности жидкости и пара, кг/м³.

Все величины определяются по температуре насыщения t_s ; T_s —температура насыщения, K.

При кипении жидкости на горизонтальных трубах и плитах в условиях свободного движения скорость отвода пара от поверхности в основном определяется силой, вызываемой ускорением свободного падения. Значение $q_{\kappa p}$ для этих условий могут рассчитываться по формуле

$$q_{\kappa p1} = 0.14r \sqrt{\rho''} \sqrt[4]{\sigma g(\rho' - \rho'')}.$$
 (3.23)

3.6. Теплообмен при пленочном кипении

При пленочном режиме кипящая жидкость отделена от поверхности нагрева паровой пленкой, причем температура поверхности $t_{\rm c}$ значительно превышает температуру насыщения. Поэтому наряду с конвективным теплообменом между поверхностью и паровой пленкой при высоких температурах заметная часть в переносе тепла принадлежит тепловому излучению.

Интенсивность конвективного теплообмена при пленочном режиме определяется термическим сопротивлением паровой пленки. Характер движения пара в пленке и ее толщина зависят от поверхности и формы поверхности нагрева и ее расположения в поле тяжести, а также от условий движения жидкости.

При пленочном кипении на поверхности горизонтальных труб паровая пленка имеет толщину, измеряемую долями миллиметра, а движение пара в ней носит ламинарный характер. Средние коэффициенты теплоотдачи составляют примерно $100...300 \, \mathrm{Bt/(m^2 \cdot K)}$

Расчет теплообмена при пленочном кипении на горизонтальных трубах в большом объеме следует проводить по формуле

$$\alpha = 0.624 \sqrt{\frac{\lambda''^{3}(\rho' - \rho'')gr^{*}}{\nu''D(t_{c} - t_{c})}},$$
(3.24)

где $r^* = r + 0.5c_p''(t_c - t_s)$ — эффективная теплота парообразования, учитывающая перегрев пара в пленке; D — диаметр трубы.

Физические свойства (за исключением плотности жидкости) относятся к паровой фазе. Их следует выбирать по средней температуре пара $t_{\rm cp}{=}0.5(t_{\rm c}{+}t_{\rm s})$. При пленочном кипении на поверхности вертикальных труб и пластин течение пара в пленке имеет турбулентный характер. Расчет теплоотдачи в этом случае может проводиться по формуле

$$\alpha = 0.25\sqrt[3]{\frac{\lambda''^2 c_p'' g(\rho' - \rho'')}{v''}}.$$
 (3.25)

Физические параметры в этой формуле следует выбирать по средней температуре пара.

При пленочном кипении жидкости на поверхности горизонтальной плиты значительных размеров поверхность паровой пленки испытывает интенсивные волновые колебания, в результате которых в различных ее точках периодически образуются всплывающие вверх паровые пузыри. Несмотря на это формулой (3.25) можно пользоваться при пленочном кипении жидкости на горизонтальной плите значительных размеров.

Прекращение пленочного кипения происходит тогда, когда температура поверхности нагрева оказывается равной или обычно несколько более низкой, чем температура предельного перегрева жидкости $t_{\rm п}$. Последняя определяет тот максимальный перегрев жидкости, выше которого жидкая фаза оказывается термодинамически абсолютно неустойчивой, она самопроизвольно распадается и испаряется.

Пленочное кипение прекращается, когда температурный напор $\Delta t_{\rm kp2} = t_{\rm c} - t_{\rm s}$ оказывается равным и обычно несколько меньшим, чем температурный напор, соответствующий предельному перегреву $\Delta t_{\rm n} = t_{\rm n} - t_{\rm s}$.

Таким образом

$$\Delta t_{\kappa p2} = c \Delta t_n,$$

где коэффициент c обычно лежит в пределах 0,8...1,0.

При более высоких температурах поверхности ($t_c > t_n$) жидкость не может соприкасаться с поверхностью нагрева, так как при приближении к поверхности происходит самопроизвольное её распадение и испарение. Это определяет возможность существования пленочного кипения, несмотря на то, что паровая пленка часто оказывается гидродинамически неустойчивой. Критическая плотность теплового потока при прекращении пленочного режима кипения $q_{\rm kp2}$ может быть найдена из соотношения

$$q_{\kappa p2} = \alpha \Delta t_{\kappa p2}, \qquad (3.26)$$

где α – коэффициент теплоотдачи в режиме пленочного кипения, определяемый по формулам (*) и (**).

Пример. Определить наибольшие тепловые потоки, которые можно отвести от поверхности нагрева при пузырьковом режиме кипения воды в условиях большого объема при давлениях 10 и 100 бар.

Наибольшие тепловые потоки при пузырьковом кипении составляют значение $q_{\rm kp1}$. Расчет $q_{\rm kp1}$ проводим по

$$q_{\kappa p1} = 0.14r \sqrt{\rho''} \sqrt[4]{\sigma g(\rho' - \rho'')}.$$
 (3.27)

При давлении 10 бар физические свойства воды:

$$r=2.02\cdot 10^6$$
 Дж/кг, $\sigma=4.2\cdot 10^{-2}$ Н/м, $\rho'=887$ кг/м³, $\rho''=5.15$ кг/м³, $q_{\kappa\rho 1}=0.14\cdot 2.02\cdot 10^6\sqrt{5.15}\cdot \sqrt[4]{4.2\cdot 10^{-2}\cdot 9.81(887-5.15)}=2.8\cdot 10^6$ Вт/м². При давлении 100 бар физические свойства воды:

$$\begin{split} r &= 1.32 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг, } \sigma = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ H/m, } \rho' = 691 \text{ кг/m}^3, \; \rho'' = 54.6 \text{ кг/m}^3, \\ q_{\kappa \rho 1} &= 0.14 \cdot 1.32 \cdot 10^6 \sqrt{54.6} \cdot \sqrt[4]{1.2 \cdot 10^{-2} \cdot 9.81 \big(691 - 54.6\big)} = 4.05 \cdot 10^6 \text{ Bt/m}^2. \end{split}$$

Пример. Найти коэффициент теплоотдачи и тепловой поток, отводимый конвективным путем от поверхности горизонтальной трубы D=12мм в пленочном режиме кипения воды при атмосферном давлении, если температура поверхности трубы равна t_c =500°C.

Расчет коэффициента теплоотдачи проводим по формуле:

$$\alpha = 0.624 \sqrt{\frac{\lambda''^{3}(\rho' - \rho'')gr^{*}}{\nu''D(t_{c} - t_{c})}}.$$
(3.28)

Определяющая температура равна $t_{cp} = \frac{1}{2} (500 + 100) = 300$ °C.

Физические свойства водяного пара при этой температуре и атмосферном давлении:

$$\lambda'' = 4.43 \cdot 10^{-2}$$
 Bt/(м·K); $\rho'' = 0.384$ кг/м³; $\nu'' = 4.43 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $c_p'' = 2.01 \cdot 10^3$ Дж/(кг·K).

Плотность воды при атмосферном давлении: $\rho' = 958$ кг/м³, теплота парообразования $r = 2.26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Эффективная теплота парообразования

$$r^* = 2.26 \cdot 10^6 + 0.5 \cdot 2.01 \cdot 10^3 (500 - 100) = 2.66 \cdot 10^6$$
 Дж/кг;

$$\alpha = 0.62\sqrt[4]{\frac{(4.43 \cdot 10^{-2})^3 (958 - 0.384) \cdot 9.81 \cdot 2.66 \cdot 10^6}{4.43 \cdot 10^{-5} \cdot 12 \cdot 10^{-3} (500 - 100)}} = 196 \text{ BT/(M}^2 \cdot \text{K)};$$

$$q = 2 \cdot \Delta t = 2(t_c - t_s) = 196 \cdot 400 = 7.85 \cdot 10^4$$
 BT/M².

4 ПЕРЕДАЧА ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ

4.1 Общие сведения и основные понятия

Существуют 3 вида передачи тепла:

1) теплопроводностью; 2) конвенцией; 3) излучением.

Перенос тепла излучением осуществляется в результате распространения электромагнитных колебаний, энергия которых при взаимодействии с веществом переходит в тепло.

Лучеиспускание, радиация, лучистый теплообмен — это название одного и того же явления, которое связано с распространением электромагнитных колебаний.

При помощи лучеиспускания при высоких температурах происходит передача основного количества энергии, 90...95% тепла передается лучеиспусканием при высоких температурах.

В низкотемпературных печах передача тепла происходит в основном за счет конвенции.

В среднетемпературных печах (700...900°С) количество передаваемого тепла составляет примерно половину за счет конвенции и излучения.

Долгие годы лучеиспусканию не придавали должного внимания.

Русский ученый Грум-Гржимайло создал теорию печей. Он создал гидравлическую теорию печей, под его руководством происходило строительство этих печей. Гидравлическая теория печей не принимала во внимание передачу тепла излучением.

Излучение является таким видом передачи тепла, которое во многих случаях является единственным способом передачи тепла.

4.2 Природа лучистой энергии

Лучистая энергия представляет одну из форм кинетической энергии. Природа очень сложна. Существуют две теории, которые дают возможность рассматривать излучение, они имеют свои недостатки и преимущества. В основном будем базироваться на волновой теории.

излучение процесс Тепловое представляет собой внутренней энергии распространения пространстве В излучающего тела в виде электромагнитных волн. Законы лучистого теплообмена сильно отличаются от законов передачи теплообмена. теплопроводностью конвективного тепла И

Возможность передачи тепла излучением через безвоздушное особенностью отличительной пространство является теплопередачи ЭТОГО ΗИ теплопроводностью, вида, T.K. передается. конвекцией тепло через не вакуум требуется распространения электромагнитных волн не материальной среды, в вакууме они распространяются скоростью света и характеризуются длиной волны частотой колебаний ν .

Тепловое излучение свойственно всем телам, и каждое из них излучает энергию в окружающее пространство. При попадании на другие тела эта энергия частично поглощается, частично отражается и частично проходит сквозь тело. Та часть энергии, которая поглощается телом, снова превращается в тепловую. Та часть энергии, которая отражается телом и которая проходит сквозь тело, попадает на другие тела и ими поглощается. Следовательно, каждое тело не только непрерывно излучает, но и непрерывно поглощает лучистую энергию.

Большинство жидких и твердых тел излучают энергию всех длин волн от 0 до ∞ , т.е. имеют сплошной непрерывный спектр излучения. Газы излучают энергию только в определенных интервалах длин волн, т.е. имеют селективный или выборочный спектр излучения. Твердые тела излучают и поглощают энергию поверхностью, а газы — объемом.

Излучение всех тел зависит от температуры. С увеличением температуры излучение увеличивается, так как увеличивается внутренняя энергия тела. В металлах многие электроны являются свободными. Электроны движутся и при этом испытывают нерегулярное торможение. Вследствие этого излучение металлов приобретает характер импульсов и имеет волны различной частоты, и в том числе волны низкой частоты. Помимо волновых обладает излучение также И корпускулярными свойствами. Корпускулярные свойства состоят в том, лучистая энергия испускается и поглощается материальными телами не непрерывно, а отдельными дискретными порциями квантами света или фотонами.

Испускаемый фотон — частица материи, обладающая энергией, количеством движения и электромагнитной массой. Кванты энергии имеют свою окраску. В спектре цвета располагаются следующим образом ФСГЗЖОК (фиолетовый,

синий, голубой, зеленый, желтый, оранжевый, красный). Окраска кванта определяется длиной волны. Те кванты энергии, которые мы видим, имеют красный цвет и длину 0,7...0,75 микрометра.

Все виды электромагнитного излучения имеют одинаковую природу и различаются лишь длиной волны. Виды излучения в зависимости от длины волны приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 –Виды излучения в з	зависимости от длины волны.
---------------------------------	-----------------------------

Вид излучения	Длина волны, мм
Радиоволны	0,8х км
Тепловое (инфракрасное)	$0.8 \cdot 10^{-3} \dots 0.8$
Видимое	$0,4\cdot 10^{-3}\dots 0,8\cdot 10^{-3}$
Ультрафиолетовое	$20 \cdot 10^{-6} \dots 0, 4 \cdot 10^{-3}$
Рентгеновское	$1 \cdot 10^{-9} \dots 20 \cdot 10^{-6}$
<i>γ</i> –излучение	$0,5\cdot 10^{-9}\dots 1\cdot 10^{-9}$
Космическое	$0.05 \cdot 10^{-9}$

Для нас наибольший интерес представляют те лучи, возникновение которых определяется только температурой и оптическими свойствами излучающего тела. Такими свойствами обладают световые и инфракрасные лучи, т.е. лучи с длиной волны приблизительно 0,4...800 мкм. Эти лучи называют тепловыми, а процесс их распространения тепловым излучением или радиацией. Природа тепловых и световых лучей одна и та же. Разница между ними лишь в длине волны: световые лучи имеют длину 0,4...0,8, а тепловые 0,8...800 мкм.

4.3 Виды лучистых потоков

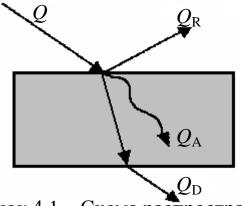


Рисунок 4.1 – Схема распространения падающей лучистой энергии

Пусть ИЗ всего количества энергии падающей на тело (рисунок 4.1), часть Q_A поглощается, часть отражается и часть проходит сквозь тело, ЧТО $Q=Q_A+Q_R+Q_D$. Разделив обе части уравнения на Q, получим

$$\frac{Q_A}{Q} + \frac{Q_R}{Q} + \frac{Q_D}{Q} = 1 \tag{4.1}$$

ИЛИ

$$A+R+D=1. (4.2)$$

Отношение $Q_{\rm A}/Q$ характеризует поглощательную способность тела A, отношение $Q_{\rm R}/Q$ — отражательную способность R и $Q_{\rm D}/Q$ — пропускательную способность (D). Все эти величины изменяются в пределах от 0 до 1.

Если тело поглощает все падающие на него лучи, т.е. \underline{A} =1 (R=0, D=0), то оно называется абсолютно черным телом. Если R=1, то A=0 и D=0, это означает, что вся падающая лучистая энергия полностью отражается. При этом, если отражение правильное (правильным называется такое отражение, которое следует законам геометрической оптики), тело называется зеркальным, если же отражение диффузное - абсолютно белым. Если D=1, то A=0 и R=0; это означает, что вся падающая энергия полностью проходит сквозь тело. Такие тела называются абсолютно проницаемыми (прозрачными) или диатермичными.

Абсолютно черных, белых и прозрачных тел в природе нет, в применении к реальным телам эти понятия условны. Такие тела называются *серыми*.

Серые тела отличаются друг от друга тем, что коэффициент поглощения может быть различным. Существуют тела, которые называются цветными телами. Характерной особенностью цветных тел является то, что они поглощают и излучают разные длины волн по разному.

Значения A, R и D зависят от природы тела, его температуры и спектра падающего излучения. Имеются тела, которые прозрачны лишь для определенных длин волн. Кварц для тепловых лучей непрозрачен, а для световых и ультрафиолетовых — прозрачен. Каменная соль прозрачна для тепловых лучей и непрозрачна для ультрафиолетовых.

То же относится к понятиям отражения и поглощения. Белая по цвету поверхность хорошо отражает лишь световые лучи. В жизни это свойство хорошо используется: белые летние костюмы, белая окраска вагонов — ледников, цистерн. Невидимые тепловые лучи белые ткань и краска поглощают также хорошо, как и темные. Для поглощения и отражения тепловых лучей большое значение имеет не цвет, а состояние поверхности.

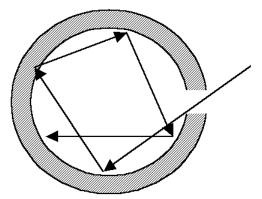


Рисунок 4.2 – Ход луча в полом теле

Независимо от цвета отражательная способность гладких и полированных поверхностей во много развыше, чем шероховатых.

Для увеличения поглощательной способности тел их поверхность покрывается темной шероховатой краской.

Свойством абсолютно черного тела обладает и отверстие в стенке полого тела. Для этого отверстия

A=1 ибо можно считать, что энергия луча, попадающего в это отверстие полностью поглощается внутри полого тела (рисунок 4.2). Все величины, относящиеся к абсолютно черному телу, будем обозначать "0".

Бархат близок к абсолютно черному телу, коэффициент поглощения A=0,98. Зеркала, отполированная платина, золото имеют зеркальную поверхность, коэффициент отражения равен R=0,99.

Если на тело извне не падает никаких лучей, то с единицы поверхности тела отводится лучистый поток энергии E_1 , Bt/m^2 (рисунок 4.3). Он полностью определяется температурой и физическими свойствами тела. Это собственное излучение тела. Обычно со стороны других тел на рассматриваемое тело падает лучистая энергия в

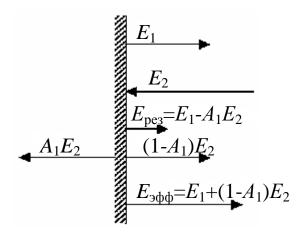


Рисунок 4.3 – Виды теплового излучения

количестве E_2 , это падающее излучение. Часть падающего излучения в количестве A_1E_2 поглощается телом — поглощенное излучение; остальное в количестве $(1-A_1)E_2$ отражается — отраженное излучение.

Собственное излучение тела в сумме с отраженным называется эффективным излучением $E_{9\varphi\varphi}=E_1+(1-A_1)E_2$. Это фактическое излучение тела, которое ощущаем или измеряем приборами, оно больше собственного на величину $(1-A_1)E_2$.

Результирующее излучение $E_{\rm pes}$ представляет собой разность между собственным излучением тела и той частью падающего внешнего излучения E_2 , которое поглощается данным телом A_1E_2 .

Результирующее излучение равно

$$E_{pe3} = E_1 - A_1 E_2$$
.

Величина $E_{\rm pe3}$ определяет поток энергии, который данное тело передает окружающим его телам в процессе лучистого теплообмена. Если величина $E_{\rm pe3}$ оказывается отрицательной $(E_{\rm pe3}{<}0)$, это значит, что тело в результате лучистого теплообмена получает энергию.

4.4 Законы теплового излучения

Количество энергии, излучаемое единицей поверхности в единицу времени, называется излучательной способностью тела.

$$E = \frac{Q^*}{F}, B_T/M^2. \tag{4.3}$$

Излучательная способность E представляет не что иное как плотность теплового потока q т.е. q=E.

Интенсивность излучения представляет собой энергию, излучаемую телом в диапазоне длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$, отнесенную к рассматриваемому интервалу длин волн $d\lambda$

$$J_{\lambda} = \frac{dE}{d\lambda}; B_{\text{T/M}}^{3}. \tag{4.4}$$

3акон Планка. На основании глубоких теоретических исследований в области теплового излучения М. Планк в 1900г. установил зависимость интенсивности излучения абсолютно черного тела от длины волны λ и абсолютной температуры T. Эта зависимость, получившая название закона Планка, записывается в следующем виде

$$J_{0\lambda} = \frac{c_1 \cdot \lambda^{-5}}{\frac{c_2}{\rho^{\lambda T}} - 1},\tag{4.5}$$

где e — основание натурального логарифма;

λ – длина волны излучения, м;

T — температура излучающего тела, K;

$$c_1$$
, c_2 – постоянные; c_1 =3,74·10⁻¹⁶ Вт·м², c_2 =1,44·10⁻² м·К.

Постоянные Планка позволяют определить интенсивность излучения для любой длины или спектральной интенсивности в зависимости от длины волны.

Закон Планка можно разделить на две части.

Первая часть: все тела с температурой выше температуры абсолютного нуля излучают в пространство со своей поверхности.

Вторая часть: чем выше температура тела, тем больше излучение в окружающее пространство.

Графически закон Планка приведен на рисунке 4.4.

Из рисунка 4.4 следует, что:

- при всех температурах интенсивность излучения J_0 =0 при длинах волн λ =0 и λ = ∞ ;
- с увеличением температуры интенсивность излучения возрастает;
- максимумы кривых интенсивности излучения с увеличением температуры смещаются в сторону более коротких длин волн

$$\lambda_{m5} < \lambda_{m4} < \lambda_{m3} < \lambda_{m2} < \lambda_{m1}$$
.

Закон Релея–Джинса. Закон Планка имеет два предельных случая. К одному из них относится случай, когда

$$\lambda T>>c_2$$
 или $\frac{c_2}{\lambda T}<<1.$

В этом случае можно произвести преобразование, если $e^{\frac{c_2}{\lambda T}}$ разложить в степенной ряд

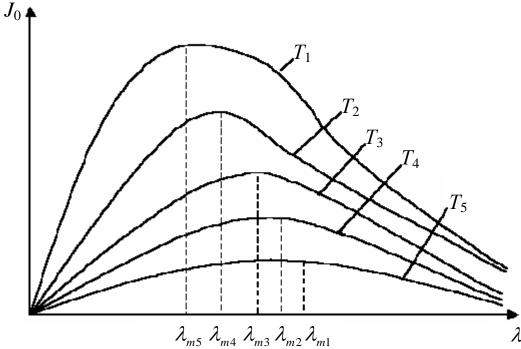


Рисунок 4.4 – Графическое представление закона Планка

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{c_2}{\lambda T} + \frac{1}{2!} \left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)^2 + \dots$$
 (4.6)

Если $\lambda T >> c_2$, то можно ограничиться первыми двумя слагаемыми ряда.

$$J = \frac{1}{\lambda^5} \frac{c_1}{1 + \frac{c_2}{\lambda T} - 1} = \frac{1}{\lambda^5} \frac{c_1 \lambda T}{c_2} = \frac{c_1 T}{\lambda^4 c_2}.$$
 (4.7)

Откуда получаем выражение закона Релея-Джинса

$$J = \frac{c_1 T}{c_2 \lambda^4}. (4.8)$$

При больших значениях λT , что соответствует правой ветви, получаем, что интенсивность прямо пропорциональна температуре и обратно пропорциональна длине волны в 4 степени.

Закон смещения или закон Вина. Второй предельный случай соответствует малому значению произведения λT . Если λT очень мало, то тогда показатель экспоненты в уравнении Планка стремится к ∞ и можно пренебречь 1.

$$J = \frac{1}{\lambda^5} \frac{c_1}{e^{c_2/\lambda T}}.$$
 (4.9)

Закон Вина дает величину интенсивности излучения как функцию от температуры и длины волны.

Взяв производную от интенсивности излучения по длине волны и приравняв её нулю, найдем длину волны, которая соответствует максимуму интенсивности излучения при данной температуре.

Связь между температурой T и длиной волны λ_{m} , соответствующей максимуму интенсивности излучения при этой температуре, устанавливается законом Вина

$$\lambda_m \cdot T = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ M} \cdot \text{K}.$$

Пользуясь этим законом, можно установить температуру излучающего тела, если известна длина волны, соответствующая максимуму интенсивности излучения. Так в солнечном спектре этот максимум приходится на длину волны λ_m =0,5мкм.

Следовательно, температура излучающей солнечной поверхности составляет приблизительно $T = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{0.5 \cdot 10^{-6}} \approx 5800 K.$

Закон Стефана - Больцмана. По закону М. Планка можно посчитать энергию, которая излучается абсолютно черным телом при какой-то длине волны. Закон Стефана-Больцмана позволяет определить количество энергии, которое излучается абсолютно черным телом во всем диапазоне длин волн от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$ при соответствующей температуре.

Общее количество тепла, которое излучается на всех длинах волн при определенной температуре, называется излучательной способностью или плотностью излучения тела E_0 , B_T/M^2

$$E_0 = \int_0^\infty J_0 d\lambda = \sigma_0 T^4, \qquad (4.10)$$

где σ_0 называется постоянной Стефана-Больцмана и равна

$$\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8}$$
, BT/(M²·K⁴).

Поскольку величина σ_0 маленькая по значению, абсолютная температура в четвертой степени имеет большое технических пользуются расчетах значение, В другим выражением закона Стефана-Больцмана

$$E_0 = c_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4,\tag{4.11}$$

где c_0 – коэффициент излучения абсолютно черного тела: $c_0 = 5{,}67~{
m BT/(m}^2{\cdot}{
m K}^4).$

$$c_0 = 5.67 \text{ BT/(M}^2 \cdot \text{K}^4).$$

Закон Стефана-Больцмана справедлив строго только для абсолютно черных тел.

Опытами Стефана и других исследователей было доказано, что этот закон может быть применен и к реальным телам. В этом

случае он запишется в виде
$$E = c \left(\frac{T}{100}\right)^4$$
. (4.12)

Коэффициент излучения с всегда меньше определяется природой тела, состоянием поверхности температурой.

Если спектральная интенсивность излучения диффузно излучаемого тела для всех длин волн составляет одну и ту же долю от спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела при той же температуре, то такое тело называется «серым».

Сопоставляя излучательную способность "серого" тела с излучательной способностью абсолютно черного тела при той же температуре, получим другую характеристику тела, которая называется излучательностью или *степенью черноты*

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{c}{c_0};\tag{4.13}$$

$$E = c \left(\frac{T}{100}\right)^4 = \varepsilon \cdot c_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4. \tag{4.14}$$

Излучательность (степень черноты) меняется в пределах $0<\varepsilon<1$.

Особенностью "серого" тела является то, что

- имеет непрерывный спектр излучения во всем диапазоне длин волн;
- способно поглощать не всю энергию;
- излучательность (степень черноты) представляет одну и ту же величину для всех длин волн.

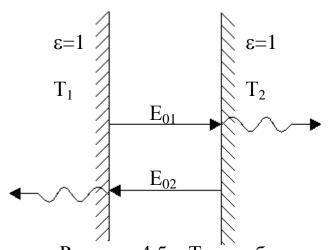


Рисунок 4.5 — Теплообмен излучением между двумя абсолютно черными телами

Теплообмен между двумя телами по закону Стефана-Больцмана. Пусть имеются два абсолютно черных тела, расположенных близко друг к другу (рисунок 4.5), так что в зазор не уходит энергия.

Первое тело излучает количество энергии, пропорциональное температуре T_1

$$E_{01} = c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4.$$

Другое тело излучает количество энергии, пропорциональное температуре T_2

$$E_{02} = c_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4.$$

Результирующий тепловой поток

$$q = E_{01} - E_{02} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \tag{4.15}$$

Если требуется определить количество переданного тепла, то

$$Q = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot F \cdot \tau.$$
 (4.16)

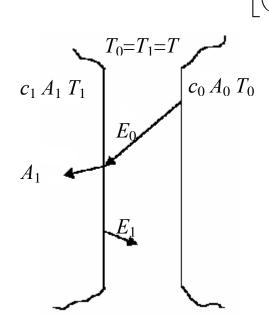


Рисунок 4.6 – Теплообмен излучением между двумя телами

Закон Кирхгофа. Закон Кирхгофа устанавливает связь между излучательной и поглощательной способностью тела.

Первая часть: чем выше способность поглощения, тем выше способность излучения.

Вторая часть: какие волны тело способно поглощать при встрече с лучами, такие же способно излучать будучи нагретым.

Пусть имеются две параллельные плоские поверхности, и расстояние между

этими поверхностями настолько мало по сравнению с размерами, что излучение с одной поверхности полностью поверхности (рисунок попадает на другую. Обе эти находятся в состоянии термодинамического равновесия, т.е. температуры. Одна из поверхностей одинаковые имеющие другая "серая". Количество энергии, черная, а абсолютно излучаемое единицей поверхности абсолютно черного тела в единицу времени, E_0 . Поскольку рассматривается замкнутая бесконечных состоящая двух параллельных система, ИЗ поверхностей, вся эта энергия падает на серую поверхность, которая поглощает количество энергии, равное A_1E_0 . Так как рассматривается равновесная система, температура поверхности должна В соответствии coвторым началом

термодинамики оставаться неизменной. Следовательно серая поверхность излучает ровно столько же энергии, сколько поглощает $A_1E_0=E_1$.

Серая поверхность, характеризуемая поглощательной способностью A_1 , может быть заменена любыми другими серыми поверхностями, у которых поглощательная способность A_2 , A_3 и т.д. Полученную зависимость можно представить в виде

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \dots = E_0.$$

Эта зависимость называется законом Кирхгофа. Сущность закона Кирхгофа может быть сформулирована следующим образом: отношение лучеиспускательной способности тела к его коэффициенту поглощения одинаково для всех тел, имеющих одинаковую температуру, и равно лучеиспускательной способности абсолютно черного тела при той же температуре.

Сопоставляя выражения $E=\varepsilon E_0$ и $E=AE_0$, заметим, что для серого тела излучательность (степень черноты) тождественно равна поглощательной способности тела

$$\varepsilon = A$$
,

т.е., чем сильнее тело поглощает падающую на него энергию, тем больше энергии оно может излучить (при прочих равных условиях).

Излучательность (степень черноты) — это отношение энергии излучения данного тела к энергии излучения абсолютного черного тела при той же температуре:

 $\varepsilon = 1$ — абсолютно черное тело; $\varepsilon = 0$ — абсолютно белое тело.

Для большинства тел, с которыми приходится иметь дело в технике, излучательность равна $\varepsilon \sim 0.8$.

Численно излучательность равна коэффициенту поглощения, но по физическому смыслу они различаются; коэффициент A — характеризует поглощательную способность тела, ε — излучательную способность тела.

Закон Кирхгофа может быть применим и для монохроматического излучения. В этом случае он формулируется так: отношение излучательной способности определенной длины волны к поглощательной способности при той же длине волны для всех тел одно и тоже.

$$\frac{E_{1\lambda}}{A_{1\lambda}} = \frac{E_{2\lambda}}{A_{2\lambda}} = \frac{E_{0\lambda}}{A_{0\lambda}} = E_{0\lambda};$$

$$\frac{J_{1\lambda}}{A_{1\lambda}} = \frac{J_{2\lambda}}{A_{2\lambda}} = \frac{J_{0\lambda}}{A_{0\lambda}} = J_{0\lambda};$$
(4.17)

$$\frac{J_{1\lambda}}{A_{1\lambda}} = \frac{J_{2\lambda}}{A_{2\lambda}} = \frac{J_{0\lambda}}{A_{0\lambda}} = J_{0\lambda}; \tag{4.18}$$

$$\varepsilon = \frac{J}{J_0}. (4.19)$$

Закон квадратов расстояний. Он устанавливает связь между плотностью теплового потока и расстоянием от источника излучения.

Представим себе поток лучистой энергии, испускаемый небольшим элементом или точечным источником в пределах некоторого пространственного угла. Если среда, в которой движется лучистая энергия, прозрачная, то общая мощность лучистого потока, выражаемая в Вт, будет оставаться постоянной на любых расстояниях от вершины конуса.

Однако плотность лучистого потока, то есть его мощность, отнесённая к единице площади поперечного сечения потока, Вт/м², не может оставаться постоянной, так как поперечное сечение конуса и самого лучистого потока возрастает по мере увеличения расстояния от вершины конуса. Так как радиус основания конуса возрастает пропорционально расстоянию этого конуса, основания OT вершины a площадь основания пропорциональна квадрату его радиуса, плотность лучистого обратно пропорционально изменяется квадрату расстояния от источника излучения (рисунок 4.7).

Из подобия треугольников запишем

$$\frac{r=1}{r}=\frac{d_{r=1}}{d_r},$$

откуда
$$d_r = d_{r=1} \frac{r}{r=1} = d_{r=1} r$$
.

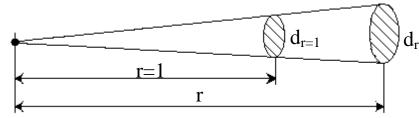


Рисунок 4.7 – Схема излучения точечного источника

Тепловой поток
$$Q_1^*=E_{r=1}\cdot f_1$$
 и $Q_2^*=E_r\cdot f_2$, где
$$f_1=\frac{\pi d_{r=1}^2}{4}$$
 и $f_2=\frac{\pi d_r^2}{4}$.

Поскольку тепловая мощность с увеличением расстояния от источника не меняется, то

$$Q_1^* = Q_2^* \quad \text{или} \quad E_{r=1} f_1 = E_r f_2.$$
 Тогда $E_r = E_{r=1} \cdot \frac{f_1}{f_2} = E_{r=1} \cdot \frac{\pi d_{r=1}^2 / 4}{\pi d_r^2 / 4}.$ (4.20)

Или
$$E_r = E_{r=1} \cdot \frac{d_{r=1}^2}{(d_{r=1} \cdot r)^2}$$
. (4.21)

Эта зависимость называется законом квадратов расстояний

$$E_r = \frac{E_1}{r^2},$$
 (4.22)

где E_1 – плотность лучистого потока на расстоянии 1м от излучателя;

 $E_{\rm r}$ – то же, на расстоянии r метров.

Этот закон справедлив для всех случаев, когда размеры излучающего тела или элемента поверхности очень малы по сравнению с расстоянием. Однако в тех случаях, когда поверхность излучающего тела имеет размеры, соизмеримые с величиной расстояния, пользоваться законом квадратов расстояний уже нельзя.

Закон Ламберта. С помощью закона Стефана-Больцмана можно определить общее количество энергии Е, излучаемое телом по всем направлениям. Однако распределение этой энергии по различным направлениям оказывается неодинаковым.

Лучеиспускательная способность в направлении нормали

$$B = \frac{E}{\pi},\tag{4.23}$$

где E — плотность интегрального полусферического излучения абсолютно черного тела, определяемая по закону Стефана-Больцмана, Bt/m^2 ;

B – яркость интегрального излучения, B_T/M^2 .

Из соотношения следует, что яркость излучения в направлении нормали к поверхности излучения в π раз меньше плотности полного полусферического излучения.

Для монохроматического излучения

$$B_{\lambda} = \frac{J}{\pi},\tag{4.24}$$

где J — спектральная интенсивность излучения, определяемая по закону Планка, $\mathrm{Br/m}^3$;

 B_{λ} – яркость монохроматического излучения Bт/м³.

Согласно закону Ламберта (рис. 4.8), количество энергии E_{ϕ} , излучаемое телом в направлении, составляющем с нормалью к поверхности угол ϕ , определяется уравнением

 $E_{\varphi} = B \cdot \cos \varphi. \tag{4.25}$

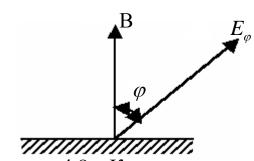


Рисунок 4.8 – К определению количества энергии по закону Ламберта

Следовательно, наибольшее количество энергии излучается в направлении нормали при φ =0, с увеличением угла φ количество излучаемой энергии уменьшается, а при φ =90° оно равно нулю.

Плотность интегрального полусферического излучения

$$E = c \left(\frac{T}{100}\right)^4 = \varepsilon \cdot c_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4, \tag{4.26}$$

тогда
$$B = \frac{1}{\pi} \varepsilon c_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4$$
 или $E_{\varphi} = \frac{1}{\pi} \varepsilon c_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cos \varphi$. (4.27)

Опыт показывает, что закон Ламберта строго справедлив только для абсолютно черного тела. У серых тел этот закон подтверждается лишь в пределах φ =0...60°.

4.5 Черные температуры

Законы теплового излучения позволяют в качестве характеристики нечерного тела наряду с его степенью черноты ввести так называемую черную температуру.

Под черной температурой понимается такая условная температура, которую должно иметь тело, чтобы испускаемое им излучение было черным. Каждое тело может характеризоваться

целым рядом черных температур в зависимости от рода испускаемого излучения.

При сопоставлении полных интегральных потоков излучения тела с температурой T и абсолютно черного тела черная температура носит название радиационной $(T_{\rm p})$. По определению

$$E(T) = E_0(T_p)$$

или согласно закону Стефана-Больцмана

$$\sigma_0 \varepsilon T^4 = \sigma_0 T_p^4 \tag{4.28}$$

$$T = T_p \sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon}}; \quad T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{\varepsilon}}.$$
 (4.29)

Если черная температура определяется по сравнению цвета данного тела с цветом абсолютно черного тела, то она называется цветовой температурой ($T_{\rm II}$). При этом обычно рассматривается монохроматическое излучение лишь для каких-либо двух длин волн (двух цветов).

По определению должно иметь место соотношение

$$\frac{J_{\lambda 1}(T)}{J_{\lambda 2}(T)} = \frac{J_{0\lambda 1}(T_{\mu})}{J_{0\lambda 2}(T_{\mu})}.$$
 (4.30)

Используя $\varepsilon_{\lambda 1}$ и $\varepsilon_{\lambda 2}$ и закон Вина получаем

$$J_{\lambda 1}(T) = \varepsilon_{\lambda 1} J_{0\lambda 1}(T). \tag{4.31}$$

$$J_{\lambda 2}(T) = \varepsilon_{\lambda 2} J_{0\lambda 2}(T). \tag{4.32}$$

Подставим выражения (4.31) и (4.32) в уравнение (4.30)

$$\frac{\varepsilon_{\lambda 1} J_{0\lambda 1}(T)}{\varepsilon_{\lambda 2} J_{0\lambda 2}(T)} = \frac{J_{0\lambda 1}(T_{\mu})}{J_{0\lambda 2}(T_{\mu})}.$$
(4.33)

Подставим вместо интенсивности излучения значения закона Планка

$$rac{{\mathcal E}_{\lambda 1}}{{\mathcal E}_{\lambda 2}^{5}} rac{{c_{1}}}{{c_{2}/\lambda_{1}T}} = rac{{c_{1}}}{{\lambda_{1}^{5}e^{{c_{2}/\lambda_{1}T_{u}}}}} = rac{{\mathcal E}_{1}}{{\lambda_{1}^{5}e^{{c_{2}/\lambda_{1}T_{u}}}}} = rac{{c_{1}}}{{c_{1}}}.$$

После преобразования получим

 $\frac{\mathcal{E}_{\lambda 1}}{\mathcal{E}_{\lambda 2}} = \frac{e^{\frac{c_2/\lambda_2 T_u}{2}} e^{\frac{c_2/\lambda_1 T}{\lambda_1 T}}}{e^{\frac{c_2/\lambda_2 T}{2}} e^{\frac{c_2/\lambda_1 T_u}{\lambda_1 T_u}}}$ $\frac{\mathcal{E}_{\lambda 1}}{\mathcal{E}_{\lambda 2}} = e^{\frac{c_2\left(\frac{1}{\lambda_2 T_u} + \frac{1}{\lambda_1 T} - \frac{1}{\lambda_2 T} - \frac{1}{\lambda_1 T_u}\right)}}{e^{\frac{c_2/\lambda_2 T_u}{2}}}.$

или

Прологарифмируем полученное выражение

$$\begin{split} &\ln\!\left(\frac{\mathcal{E}_{\lambda 1}}{\mathcal{E}_{\lambda 2}}\right) = c_2\!\left(\frac{1}{\lambda_2 T_u} + \frac{1}{\lambda_1 T} - \frac{1}{\lambda_2 T} - \frac{1}{\lambda_1 T_u}\right); \\ &\ln\!\left(\frac{\mathcal{E}_{\lambda 1}}{\mathcal{E}_{\lambda 2}}\right) = c_2\!\left(\frac{1}{\lambda_1}\!\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_u}\right) - \frac{1}{\lambda_2}\!\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_u}\right)\right); \\ &\ln\!\left(\frac{\mathcal{E}_{\lambda 1}}{\mathcal{E}_{\lambda 2}}\right) = c_2\!\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\!\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_u}\right). \end{split}$$

Окончательно получим

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{u}} = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_{\lambda 1}}{\varepsilon_{\lambda 2}}\right)}{c_{2}\left(\frac{1}{\lambda_{1}} - \frac{1}{\lambda_{2}}\right)}.$$

При сравнении яркости монохроматического излучения данного тела и абсолютно черного тела черная температура носит название яркостной $(T_{\rm s})$. По определению

$$B_{\lambda}(T) = B_{0\lambda}(T_{s}).$$

Представляя $B_{\lambda}(T) = \varepsilon_{\lambda} B_{0\lambda}(T)$ и используя закон Вина, получаем связь между T и $T_{\rm s}$.

Яркость монохроматического излучения

$$B_{\lambda} = \frac{J_{0\lambda}}{\pi},$$

где
$$J_{0\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5 e^{\frac{C_2}{\lambda T}}}$$
.

Тогда получим

$$\varepsilon_{\lambda} \frac{c_1}{\lambda^5 e^{\frac{c_2}{\lambda T}}} = \frac{c_1}{\lambda^5 e^{\frac{c_2}{\lambda T_n}}},$$

откуда
$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{e^{\frac{c_2/\lambda_T}{\lambda T_R}}}{e^{\frac{c_2/\lambda_T}{\lambda T_R}}} = e^{\frac{c_2\left(\frac{1}{\lambda T} - \frac{1}{\lambda T_R}\right)}{\lambda T_R}}.$$
 (4.34)

Прологарифмировав, получим

$$\ln(\varepsilon_{\lambda}) = c_2 \left(\frac{1}{\lambda T} - \frac{1}{\lambda T_{g}} \right)$$

ИЛИ

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_g} = \frac{\lambda \ln(\varepsilon_{\lambda})}{c_2}.$$
 (4.35)

4.6 Лучистый теплообмен между телами

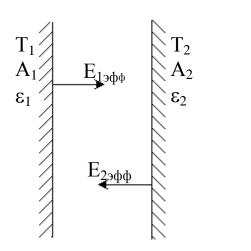


Рисунок 4.9 – Теплообмен между двумя телами

Рассмотрим теплообмен между двумя "серыми" телами (рисунок 4.9). Предположим, что температура первого тела больше, чем температура второго, то есть $T_1 > T_2$. Лучистый теплообмен между поверхностями определяется разностью эффективного излучения

$$q_{pes} = E_{19\phi\phi} - E_{29\phi\phi},$$

где $E_{19\varphi\varphi}$ — эффективное излучение первого тела; $E_{29\varphi\varphi}$ — эффективное излучение второго тела.

$$E_{1 \ni \phi \phi} = E_1 + (1 - A_1) E_{2 \ni \phi \phi}; \tag{4.36}$$

$$E_{29\phi\phi} = E_2 + (1 - A_2)E_{19\phi\phi}, \qquad (4.37)$$

где E_1 , E_2 — собственное излучение первого и второго тела;

 $(1-A_1)E_{29\phi\phi}$ — отраженное излучение первого тела;

 $(1-A_2)E_{19\phi\phi}$ — отраженное излучение второго тела.

Выполним ряд преобразований. Подставим в уравнение (4.36) значение $E_{29\varphi\varphi}$ из уравнения (4.37). Тогда

$$E_{1 \ni \phi \phi} = E_1 + (1 - A_1) \left[E_2 + (1 - A_2) E_{1 \ni \phi \phi} \right].$$

$$E_{1 \ni \phi \phi} = \frac{E_1 + (1 - A_1) E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)} = \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}.$$
(4.38)

Подставим значение $E_{19\varphi\varphi}$ из уравнения (4.38) в уравнение (4.37)

$$E_{29\phi\phi} = E_2 + (1 - A_2) \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}.$$

Окончательно получим

$$E_{2 \to \phi \phi} = \frac{E_1 + E_2 - A_2 E_1}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}.$$

Результирующий тепловой поток

$$q_{pes} = \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)} - \frac{E_1 + E_2 - A_2 E_1}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)};$$
$$q_{pes} = \frac{A_2 E_1 - A_1 E_2}{1 - (1 - A_1)(1 - A_2)}.$$

Собственное излучение тела можно определить по закону Стефана-Больцмана

$$E_1 = \varepsilon_1 c_0 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4; \quad E_2 = \varepsilon_2 c_0 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4.$$
 (4.39)

Поскольку излучательность (степень черноты) и поглощательная способность равны между собой $A=\varepsilon$, то можно записать

$$q_{pe3} = \frac{\varepsilon_{2}\varepsilon_{1}c_{0}\left(\frac{T_{1}}{100}\right)^{4} - \varepsilon_{1}\varepsilon_{2}c_{0}\left(\frac{T_{2}}{100}\right)^{4}}{\varepsilon_{2} + \varepsilon_{1} - \varepsilon_{1}\varepsilon_{2}};$$

$$q_{pe3} = \frac{c_{0}\left[\left(\frac{T_{1}}{100}\right)^{4} - \left(\frac{T_{2}}{100}\right)^{4}\right]}{\frac{1}{\varepsilon_{1}} + \frac{1}{\varepsilon_{2}} - 1},$$

$$q_{pe3} = \varepsilon_{np}c_{0}\left[\left(\frac{T_{1}}{100}\right)^{4} - \left(\frac{T_{2}}{100}\right)^{4}\right],$$
(4.40)

где $\varepsilon_{np} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$ — приведенная излучательность системы (или

приведенная степень черноты).

Обозначим $c_{\rm пp} = \varepsilon_{\rm np} c_0$ — приведенный коэффициент излучения, ${\rm Bt/(m^2 \cdot K^4)}$

$$c_{np} = \frac{c_0}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}.$$
(4.41)

Тогда результирующий тепловой поток равен

$$q_{pes} = c_{np} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \tag{4.42}$$

4.7 Угловые коэффициенты и свойства лучистых потоков

Пусть имеются два тела, произвольно расположенных в

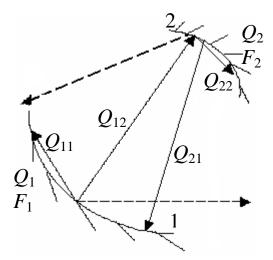


Рисунок 4.10 – Определение угловых коэффициентов

пространстве, которые обмениваются лучистым теплом. F_1 , F_2 _ теплоотдающие поверхности тел. Предположим, первое тело излучает количество энергии равное Q_1 . При распространении в пространстве часть этой энергии Q_{12} попадает с первого тела второе, часть энергии Q_{11} может попасть с первого тела на первое тело, И еще часть энергии распространится в пространстве.

Аналогично распространяется энергия, излучаемая вторым телом (рис. 4.10). Величины

$$arphi_{11} = rac{Q_{11}}{Q_1}, \; arphi_{12} = rac{Q_{12}}{Q_1}, \ arphi_{21} = rac{Q_{21}}{Q_2}, \; arphi_{22} = rac{Q_{22}}{Q_2}$$

называют угловыми коэффициентами или коэффициентами облученности. Угловой коэффициент показывает, какая часть полусферического лучистого потока, излучаемого одним телом, попадает на другое тело, находящееся в процессе теплообмена. В системе из n поверхностей будем иметь n^2 угловых коэффициентов.

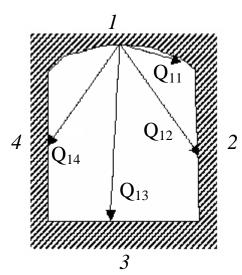


Рисунок 4.11 — Схема распределения лучистой энергии по тепловоспринимающим поверхностям

Свойства лучистых потоков:

1.Свойство взаимности

$$F_1 \varphi_{12} = F_2 \varphi_{21}$$
.

2.Свойство замыкаемости.

замкнутой Для поверхностей системы (рисунок 4.11) количес-TBO тепла, которое излучается, например, первой поверхностью, распредеравномерно ляется ПО всем поверхностям.

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14}.$$

Тогда

$$\frac{Q_{11}}{Q_1} + \frac{Q_{12}}{Q_1} + \frac{Q_{13}}{Q_1} + \frac{Q_{14}}{Q_1} = 1$$

или $\varphi_{11}+\varphi_{12}+\varphi_{13}+\varphi_{14}=1$, т.е. сумма одноименных угловых коэффициентов равна 1.

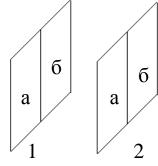
3. Свойство распределяемости.

Свойство распределяемости гласит, что лучистый поток с первого тела на второе складывается из потоков между отдельными частями тела 1 и 2.

$$\begin{aligned} Q_{12} &= Q_{1a2a} + Q_{1a2\delta} + Q_{1\delta2a} + Q_{1\delta2\delta}; \\ F_{12} &= F_{1a2a} + F_{1a2\delta} + F_{1\delta2a} + F_{1\delta2\delta}. \end{aligned}$$

4. Свойство затеняемости.

Если на пути всех лучей от тела 1 на тело 2 помещается непрозрачное тело, то лучистый поток равен нулю.



Определим угловые коэффициенты для некоторых случаев

Пусть имеются два тела, которые обмениваются между собой лучистой энергией.

1 случай. Теплоотдающие поверхности расположены параллельно друг другу, так что вся энергия, излучаемая одним телом полностью попадает на другое и наоборот.



Тогда $\varphi_{12}=1$; $\varphi_{11}=0$; $\varphi_{21}=1$; $\varphi_{22}=0$.

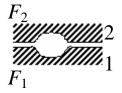
2 случай. Одно тело имеет плоскую или выпуклую теплоотдающую поверхность F_1 , a другое вогнутую теплоотдающую поверхность F_2 . Тела образуют замкнутую Энергия, излучаемая первым телом, полностью попадает на второе, а значит $\varphi_{12}=1$, $\varphi_{11}=0$. Энергия, излучаемая вторым телом, распространяется по поверхности первого тела F_1 и второго F_2 . Для определения углового коэффициента со второго тела на первое φ_{21} воспользуемся свойством взаимности $\varphi_{12}F_1 = \varphi_{21}F_2$.

$$\varphi_{21} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Угловой коэффициент со второго тела на второе определяется из свойства замыкаемости

$$\varphi_{21} + \varphi_{22} = 1; \ \varphi_{22} = 1 - \varphi_{21} = 1 - \frac{F_1}{F_2}.$$

3 случай. Теплоотдающие поверхности двух имеют вогнутые поверхности и образуют нутую систему. Вся лучистая энергия, излу- F_1 имеют вогнутые поверхности и образуют замкнутую систему. Вся лучистая энергия, излучаемая одним телом, равномерно распределяется



по поверхностям обоих тел F_1 и F_2 . Долю энергии, излучаемую телом, обозначим через 1. Тогда доля энергии, приходящаяся на единицу тепловоспринимающей поверхности, будет равна

$$\frac{1}{F_1 + F_2}$$
. Доля тепла, приходящая на первое тело,

пропорциональна его поверхности и равна $\varphi_{11} = \frac{F_1}{F_1 + F_2}$.

Аналогично остальные угловые коэффициенты равны

$$\varphi_{12} = \frac{F_2}{F_1 + F_2}; \quad \varphi_{22} = \frac{F_2}{F_1 + F_2}; \quad \varphi_{21} = \frac{F_1}{F_1 + F_2}.$$

4.8 Теплообмен излучением двумя поверхностями через лучепрозрачную среду

Рассмотрим теплообмен излучением между двумя произвольными поверхностями 1 и 2, образующими замкнутую систему. Предположим, что температура T_1 больше температуры T_2 , т.е. $T_1 > T_2$. Найдем результирующий тепловой поток, передаваемый от поверхности

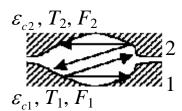


Рисунок 4.12 – К теплообмену между двумя замкнутыми поверхностями 1 к поверхности 2. Поскольку система замкнутая, то весь лучистый поток, уходящий с поверхности 1 распределяется между поверхностями 1 и 2 (рисунок 4.12). Часть теплового потока, падающая на поверхность 2, определяется угловым коэффициентом φ_{12} . Таким же образом от поверхности 2 на

поверхность 1 падает часть посылаемого потока равная φ_{21} . В результате теплообмена выигрывает поверхность 2.

Результирующий тепловой поток будет равен

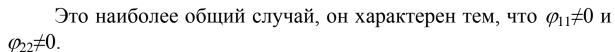
$$Q_{\text{pes}}^* = c_{np} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{12} F_1$$

$$c_{np} = f(\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2}, \varphi),$$



 $\epsilon_{c1}, \, \epsilon_{c2}$ — степени черноты поверхностей 1 и 2. Приведенный коэффициент излучения

$$c_{np} = \frac{c_0}{\left(\frac{1}{\varepsilon_{c1}} - 1\right)\varphi_{12} + \left(\frac{1}{\varepsilon_{c2}} - 1\right)\varphi_{21} + 1}.$$



Угловые коэффициенты для данного случая

$$\varphi_{12} = \varphi_{22} = \frac{F_2}{F_1 + F_2}; \quad \varphi_{21} = \varphi_{11} = \frac{F_1}{F_1 + F_2}.$$

Из двух поверхностей, участвующих в лучистом теплообмене и образующих замкнутую систему, одна плоская или выпуклая, а другая вогнутая. Тогда угловые коэффициенты имеют следующие значения φ_{11} =0; φ_{12} =1; $\varphi_{21}=\frac{F_1}{F_2}$;

$$\varphi_{22} = 1 - \frac{F_1}{F_2}$$
. Приведенный коэффициент излучения

$$c_{np} = \frac{c_0}{\frac{1}{\varepsilon_{c1}} + \left(\frac{1}{\varepsilon_{c2}} - 1\right) \frac{F_1}{F_2}}.$$
(4.43)

Для двух поверхностей, расположенных параллельно друг другу, приведенный коэффициент излучения равен

$$c_{np} = \frac{c_0}{\frac{1}{\varepsilon_{c1}} + \frac{1}{\varepsilon_{c2}} - 1},$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1.$$
(4.44)

Т.К.

4.9 Излучение в окружающее пространство



Предположим, что температура первого тела равна T_1 , теплоотдающая поверхность F_1 , первое тело — выпуклое. Окружающее пространство имеет температуру T_2 , теплоотдающая (теплопоглощающая) поверхность F_2 , которая значительно

превосходит поверхность F_1 , т.е. $F_2 \rightarrow \infty$ (рисунок 4.13).

$$Q^* = c_{np} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{12} F_1, \tag{4.45}$$

$$c_{np} = \frac{c_0}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_{c1}} - 1\right)\varphi_{12} + \left(\frac{1}{\varepsilon_{c2}} - 1\right)\varphi_{21}}.$$

$$(4.46)$$

Угловые коэффициенты $\varphi_{12}=1; \; \varphi_{21}=\varphi_{12}\cdot \stackrel{F_1}{/}_{F_2}; \; \varphi_{21}\longrightarrow 0,$

тогда $c_{np} = \varepsilon_{c1} c_0$.

4.10 Излучения через отверстия в печных стенках

В печах часто приходится иметь дело с излучением через рабочие окна, гляделки и другие отверстия, сделанные в сравнительно толстых печных стенках. Эти тепловые потери нельзя рассчитать по приведенным выше формулам, так как в

лучистом теплообмене полости печи с окружающим пространством принимает участие третья поверхность — боковая поверхность отверстия (рисунок 4.14).

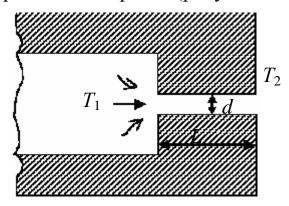


Рисунок 4.14 – K излучению через отверстия в печных стенах

Ее влияние оказывается тем существеннее, чем больше относительная толщина стенки.

Тепловой поток, излучаемый через отверстие, рассчитывается по зависимости

$$Q^* = c_{np} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1 \Phi,$$

где F_1 – поверхность отверстия излучения, м²; Φ – коэффициент диафрагмирования.

Коэффициент диафрагмирования $\Phi = f(d,L)$ и определяется по номограммам, приведенным в литературе.

Приведенный коэффициент излучения $c_{\rm np} = c_0$, поскольку отверстия, через которые происходит излучение, малы по сравнению с рабочим пространством печи, а это является моделью абсолютно черного тела.

4.11 Теплообмен в рабочем пространстве печи

Пусть свод печи (рисунок 4.15) имеет поверхность F_1 и температуру T_1 , нагреваемое тело имеет тепловоспринимающую поверхность F_2 и температуру T_2 .

Приведенный коэффициент излучения

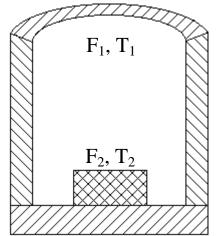


Рисунок 4.15 – Схема расположения заготовки в печи

$$c_{np} = \frac{c_0}{\frac{1}{\varepsilon_2} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) \varphi_{12}}.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$c_{np} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_2 c_0} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1 c_0} - \frac{1}{c_0}\right) \varphi_{12}},$$

где $c_1 = \varepsilon_1 c_0$ – коэффициент излучения серого тела 1;

 $c_2 = \varepsilon_2 c_0$ — коэффициент излучения серого тела 2; $c_{\rm np}$ — приведенный коэффициент излучения для системы тел.

$$c_{np} = \frac{1}{\frac{1}{c_2} + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right) \varphi_{12}},$$

где ϕ_{12} – соответствует примерно отношению площадей. Это уравнение называется уравнением Нуссельта.

Анализ уравнения Нуссельта.

1)
$$\varphi_{12}=(F_2/F_1)\to 0; c_{\pi p}=c_2.$$

Приведенный коэффициент излучения равен коэффициенту излучения тела. Это соответствует случаю, когда $F_1 >> F_2$.

2)
$$\varphi_{12}=(F_2/F_1)\rightarrow\infty; c_{np}\rightarrow0.$$

Если нагреваемое тело по площади значительно больше, чем источник $F_2>>F_1$, то нагреть тело практически невозможно.

3)
$$(F_2/F_1)=1$$
; $\varphi_{12}=1$; $c_{np}=\frac{1}{\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_0}}$.

- кладка и тело являются абсолютно черным телом: $c_1 = c_2 = c_0 = 5,67 \text{ (Bt/(м}^2 \cdot \text{K}^4)); c_{пp} = 5,67 \text{ (Bt/(м}^2 \cdot \text{K}^4));$
- греется абсолютно черное тело c_2 =5,67 (Bт/(м²·К³)); излучательность (степень черноты) кладки ε_1 =0,8; коэффициент излучения кладки c_1 =4,56 (Bт/(м²·К³)); приведенный коэффициент излучения $c_{\rm np}$ = c_1 =4,56 (Bт/(м²·К³)). Определяющей является излучательность (степень черноты) кладки;
- кладка и тело представляют серые тела, излучательность (степень черноты) которых $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.8$, тогда $c_1 = c_2 = 4.56$ (Вт/(м²·К³)); приведенный коэффициент излучения $c_{\rm np} = 3.7$ (Вт/(м²·К³)) получается меньше, чем коэффициент излучения серых тела;
- коэффициент излучения тела c_2 =3 (Bт/(м²·К³)), кладки c_1 =4 (Bт/(м²·К³)); приведенный коэффициент излучения c_{np} =2,46 (Bт/(м²·К³)),то есть приведенный коэффициент излучения для системы двух серых тел меньше, чем меньший из коэффициентов излучения двух серых тел.

4.12 Теплообмен излучением при установке экрана

При необходимости интенсифицировать лучистый теплообмен, видимо, необходимо повысить температуру излучающего

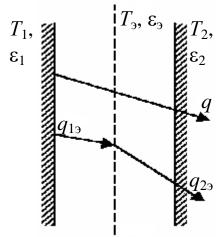


Рисунок 4.16 – Теплообмен при наличии экрана

тела и усилить излучательность (степень черноты) системы. Наоборот, чтобы уменьшить теплообмен, необходимо снизить температуру излучающего тела и уменьшить излучательность (степень черноты) тела. В тех же температуру случаях, когда изменить нельзя, для снижения лучистого теплообмена обычно экраны. Пусть применяются две плоские имеются собой параллельные между

поверхности и между ними расположен тонкостенный экран, причем степени черноты экрана и поверхностей одинаковы. Предположим, что температура $T_1 > T_2$. Тогда при отсутствии экрана теплообмен определяется уравнением:

$$q = c_{np} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

Температура экрана T_3 . экран может характеризоваться сопротивлением $R=\frac{S}{\lambda}$. Возьмем исследуемый экран, в котором толщина $S{\longrightarrow}0$, тогда и термическое сопротивление $R{\longrightarrow}0$. Либо это будет экран, у которого коэффициент теплопроводности $\lambda{\longrightarrow}\infty$, тогда R тоже стремится к нулю.

Экран изготовлен из того же материала, что и тела

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$$
.

При наличии экрана интенсивность лучистого теплообмена между этими поверхностями изменится. Вследствие стационарности процесса потоки энергии, передаваемые от первой поверхности к экрану и от экрана по второй поверхности будут одинаковы (рисунок 7.16).

$$q_{31} = c_{np} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right]$$
$$q_{32} = c_{np} \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

И

Из этих уравнений получаем, что

$$\left(\frac{T_{9}}{100}\right)^{4} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_{1}}{100}\right)^{4} + \left(\frac{T_{2}}{100}\right)^{4} \right]$$

ИЛИ

$$q_{9} = q_{19} = q_{92} = \frac{1}{2}c_{np} \left[\left(\frac{T_{1}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{2}}{100} \right)^{4} \right].$$

Таким образом, при установке одного экрана лучистый тепловой поток между двумя поверхностями уменьшился в 2 раза, а при наличии n экранов теплообмен излучением уменьшится в n+1 раз, т.е.

$$q_{n9} = \frac{1}{n+1} c_{np} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \tag{4.47}$$

При наличии n экранов, излучательность (степень черноты) которых различна, плотность теплового потока определяется

$$q_{n9} = \frac{c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon_{9i}} - (n+1)}.$$
 (4.48)

4.13 Излучение газов и паров

промышленных печах приходится иметь дело необходимым для горения воздухом, с газообразным топливом различных видов и с продуктами сгорания. В их состав могут входить одно - двух - трех и многоатомные газы. Все встречающиеся в печах одно- и двухатомные газы (аргон, кислород, азот, водород) характеризуются спектром излучения из нескольких узких полосок. Общее количество энергии, которое они излучают при высокой температуре, оказывается очень небольшим. Практически можно считать, что эти газы не излучают тепло. Для излучения, исходящего от других тел, они прозрачны, т.е. лучистая энергия свободно проходит через эти газы, не поглощается ими и не нагревает их. Общеизвестно, что сухой чистый воздух может свободно пропускать солнечные холодным. Прошедшие через оставаясь солнечные лучи, поглощаются поверхностью земли и нагревают

ее, а воздух получает тепло уже в результате соприкосновения с землей.

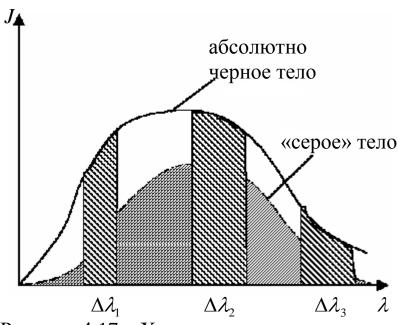


Рисунок 4.17 – Характер излучения трех– и более атомных газов

Трех- и более атомные газы, наоборот, могут поглощать, а при высокой температуре и излучать весьма значительные количества лучистой энергии. Спектры поглощения и излучения этих газов очень сложны. Они состоят из многих узких и нескольких более широких полос. Промежутки между этими полосами приходятся на такие длины волн, которые совершенно не поглощаются и не излучаются этими газами. Для работы и расчета тепловых агрегатов наиболее важным является излучение углекислоты и водяных паров. Их спектры поглощения очень сложны. Поэтому для обеспечения теоретических методов расчета излучения газов часто действительные спектры этих заменяют упрощенными И условно считают, углекислота и водяные пары могут поглощать и излучать тепловую энергию лишь лучами тех длин волн, которые лежат в пределах трех полос (рисунок 4.17).

Таким образом, излучение и поглощение газов имеет избирательный (селективный) характер. Процессы испускания и поглощения лучистой энергии в твердых (непрозрачных) телах происходят на поверхности.

В газах же излучение и поглощение всегда протекают в Количество энергии, излучаемое углекислотой парами, возрастает при повышении водяными температур газа, но это возрастание заметно отстает от закона четвертых степеней абсолютных температур.

Плотность интегрального излучения для двуокиси углерода и водяного пара по опытным данным может быть представлена зависимостями

$$E_{CO_2} = 3.5(p \cdot s)^{0.33} \left(\frac{T}{100}\right)^{3.5};$$
 (4.49)

$$E_{H_2O} = 3.5 \cdot p^{0.8} \cdot s^{0.6} \left(\frac{T}{100}\right)^{3.5},$$
 (4.50)

где p — парциальное давление данного газа в смеси, к Π а; s — эффективная длина луча или толщина газового слоя, м.

Парциальное давление рассчитывается следующим образом

$$p_{CO_2} = p_{oбщ} \cdot \frac{CO_2}{100} \, ; \quad p_{H_2O} = p_{oбщ} \cdot \frac{H_2O}{100} \, ,$$
 где $p_{oбщ}$ – общее давление смеси, кПа ;

 CO_2 и H_2O -содержание углекислоты и водяных паров в смеси, %. Эффективная длина луча

$$s = 3.6 \frac{V}{F},\tag{4.51}$$

где V – объем полости, заполненной газом, м³;

F – площадь всех поверхностей, ограничивающих этот объем, м².

Приведенные зависимости показывают, что закон излучения газов значительно отклоняется от закона Стефана-Больцмана. Однако в основу практических расчетов излучения газов положен закон. Плотность интегрального излучения ЭТОТ поверхности газового слоя определяется уравнением:

$$E = \varepsilon_{z} c_{0} \left(\frac{T}{100}\right)^{4}, \tag{4.52}$$

где $\epsilon_{\scriptscriptstyle \Gamma}$ – излучательность (степень черноты) газового зависящая от температуры, давления и толщины слоя газа.

Излучательность (степень черноты) газа – это условная характеристика, это излучательность (степень черноты) такого "серого" тела, у которого плотность излучения равна плотности излучения газа при одной и той же температуре.

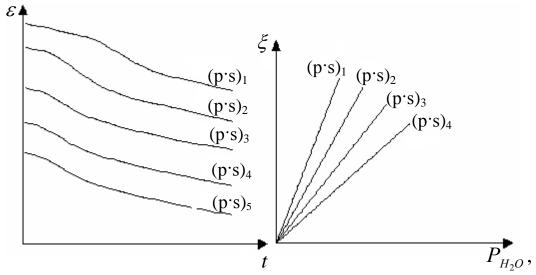


Рисунок 4.18 – Пример номограмм для определения степени черноты газов

Теоретически можно было ожидать, что излучательность черноты) объемов, заполненных газом, будет одинаковой степени зависеть как от парциального давления эффективной излучающих газов, так И OT длины лучей. Эксперименты показывают, что эти соображения подтверждаются для излучения углекислоты, но не подтверждаются для излучения водяных паров, для которых парциальное давление оказывает на излучательность (степень черноты) несколько большее влияние, чем эффективная длина лучей. Это обстоятельство учитывается при расчетах, для чего вводится соответствующий поправочный коэффициент ξ .

Излучательность (степень черноты) газов можно определить по номограммам, приведенным в литературе. Степень черноты (излучательность) газов по номограммам находится следующим образом: рассчитывается произведение парциального давления на эффективную длину луча для соответствующего газа. По произведению $p \cdot s$ и температуре t по соответствующей номограмме (рисунок 4.18) определяется излучательность (степень черноты). Для водяных паров дополнительно определяется поправочный коэффициент ξ . Степень черноты (излучательность) рассчитывается следующим образом

$$\varepsilon_{\varepsilon} = \varepsilon_{CO_2} + \xi \cdot \varepsilon_{H_2O}. \tag{4.53}$$

4.14 Закон Бугера

Закон Бугера рассматривает поглощение лучистой энергии слоем газа конечной толщины.

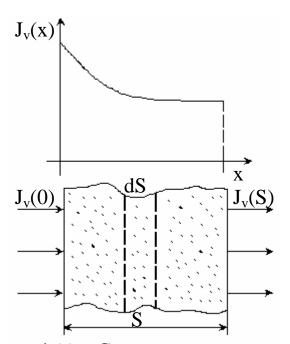


Рисунок 4.19 — Схема распространения лучистой энергии через слой газа

Если на поверхность слоя газа падает внешнее излучение, интенсивность которого $J_{\rm v}(0)$ значительно превышает интенсивность возникающего в объеме газа собственного излучения, то последнее можно не учитывать.

Изменение интенсивности излучения будет определяться в основном процессом

поглощения энергии.

На практике такое поглощение имеет место, если внешнее излучение исходит с нагретой до высокой температуры поверхности твердого тела, тогда как слой газа поддерживается при низкой температуре.

Пусть имеем луч с интенсивностью $J_{\rm v}(0)$ (рис. 4.19). Слой газа характеризуется парциальным давлением p, толщиной S. Изменение интенсивности излучения

$$dJ = -pdS \cdot k \cdot J_{v}, \tag{4.54}$$

где κ - учитывает физические свойства данного газа;

 $J_{\rm v}$ — текущая интенсивность излучения.

Чем больше dS, тем больше падение dJ, тем меньше будет J_{v} .

Проинтегрируем уравнение (а)

$$\int \frac{dJ}{J_{v}} = -\int pkdS,$$

$$\ln J_{v}(S) = -kpS + C.$$

Если S=0, то получаем, что C=ln J_{v} (0).

$$\ln J_{v}(S) = -kpS + \ln J_{v}(0),$$

$$\ln J_{v}(S) - \ln J_{v}(0) = -kpS$$

ИЛИ

$$\ln \frac{J_{v}(S)}{J_{v}(0)} = -kpS.$$

Пропотенцировав, получим

$$\frac{J_{v}(S)}{J_{v}(0)} = e^{-kpS}$$
$$J_{v}(S) = J_{v}(0) \cdot e^{-kpS}$$

 $J_{v}(S)$ – интенсивность излучения луча, который прошел слой газа толщиной S. Тогда количество поглощенной энергии будет равно разности

$$J_{nozn(v)} = J_v(0) - J_v(S) = J_v(0) \cdot (1 - e^{-kpS}).$$

Рассматривая закон Бугера говорят о монохроматическом излучении.

Поглощенная энергия длиной волны $\Delta\lambda$

$$E_{norn} = J_{norn}(v)\Delta\lambda = E_v(0)\cdot(1-e^{-kpS}),$$

где $E_{v}(0) = J_{v}(0)\Delta\lambda$.

Величина kpS характеризует степень поглощения энергии. Эти явления рассматривают обычно при определенной температуре.

Закон Бугера запишется в виде

$$E_{noen}^{T} = E_{v}^{T}(0) \cdot (1 - e^{-kpS}). \tag{4.55}$$

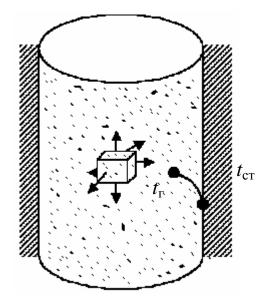


Рисунок 4.20 — Теплообмен излучением между газом и стенкой

4.15 Теплообмен излучением между газом и стенкой

Предположим, что имеется сосуд, заполненный газом (рисунок 4.20), температура газа больше температуры стенки. Тепло, излучаемое газом на единицу поверхности стенок в единицу времени равно

$$q_{z} = \varepsilon_{z} c_{0} \left(\frac{T_{z}}{100} \right)^{4}.$$

Из этого количества тепла

стенка поглощает только некоторую часть, соответствующую ее излучательности (степени черноты). Остаток отражается обратно в газ и частично поглощается газом, а частично пропускается газом и вновь попадает на стенку, где опять происходит частичное поглощение и отражение лучистого потока.

С поверхности стенок излучается тепловой поток

$$q = \varepsilon_{cm} c_0 \left(\frac{T_{cm}}{100} \right)^4, \tag{4.56}$$

одна часть которого поглощается газом, а другая проходит через него и снова попадает на стенку. Излучение стенок, пропущенное газом, опять попадает на стенки и частично поглощается ими, а частично вновь отражается в газ.

Проанализировав ход этих многократных поглощений, отражений и пропусканий лучистых потоков, Т. Л. Поляк получил следующую формулу для расчета количества тепла, передаваемого излучением от газов к стенке (или от стенок к газу), если стенки горячее газа

$$q = \frac{c_0}{\frac{1}{\varepsilon_{cm}} + \frac{1}{\varepsilon_{cm}} - 1} \left[\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{cm}} \left(\frac{T_z}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{cm}}{100} \right)^4 \right] , \quad (4.57)$$

где ε_{rc} – степень черноты газа при температуре стенки;

 $\epsilon_{\scriptscriptstyle \Gamma}$ – степень черноты газа при температуре газа;

 $\mathcal{E}_{\text{ст}}$ – степень черноты стенки.

4.16 Сложный теплообмен. Коэффициент теплоотдачи излучением

В высокотемпературных тепловых агрегатах излучение продуктов сгорания на твердую поверхность сопровождается конвективной теплоотдачей, так как продукты сгорания соприкасаются с поверхностью и омывают ее.

Плотность теплового потока, передаваемого конвекцией, запишется по закону Ньютона-Рихмана

$$q_{\kappa} = \alpha_{\kappa} (t_{\kappa} - t_{c}).$$

Плотность теплового потока, передаваемого излучением, запишется по закону Стефана-Больцмана

$$q_{\scriptscriptstyle \Pi} = c_{\scriptscriptstyle np} \left[\left(\frac{T_{\scriptscriptstyle \mathcal{M}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\scriptscriptstyle c}}{100} \right)^4 \right] .$$

Суммарная плотность теплового потока определяется уравнением:

$$q_{\Sigma} = q_{\kappa} + q_{\pi} = \alpha_{\kappa} \left(t_{\kappa} - t_{c} \right) + c_{np} \left[\left(\frac{T_{\kappa}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{c}}{100} \right)^{4} \right].$$

$$q_{\Sigma} = \left\{ \alpha_{\kappa} + \frac{c_{np} \left[\left(\frac{T_{\kappa}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{c}}{100} \right)^{4} \right]}{t_{\kappa} - t_{c}} \right\} \left(t_{\kappa} - t_{c} \right).$$

$$\alpha_{\pi} = \frac{c_{np} \left[\left(\frac{T_{\kappa}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{c}}{100} \right)^{4} \right]}{t_{\kappa} - t_{c}}.$$

Величину $\alpha_{_{\rm Л}}$ называют $\kappa o \ni \phi \phi$ ициентом теплоотдачи излучением. Размерность $\alpha_{_{\rm Л}} = \frac{{\rm BT}}{{\rm M}^2 \cdot {\rm K}}.$

Тогда

$$q_{\Sigma} = (\alpha_{\kappa} + \alpha_{\pi})(t_{\kappa} - t_{c}) \tag{4.58}$$

или, обозначив $\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\kappa} + \alpha_{\pi}$, получим

$$q_{\Sigma} = \alpha_{\Sigma}(t_{\mathcal{K}} - t_{c}). \tag{4.59}$$

5 ПЕРЕДАЧА ТЕПЛА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛОВОМ СОСТОЯНИИ

5.1 Передача тепла теплопроводностью через плоскую однослойную стенку (граничные условия 1 рода)

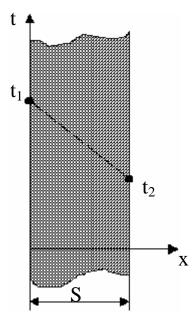


Рисунок 5.1 – Изменение температуры по толщине стенки

Рассмотрим плоскую стенку толщиной S. На одной поверхности стенки температура t_1 , на другой t_2 (рисунок 5.1). Для упрощения коэффициент теплопроводности λ будем считать постоянным, вычисленным при средней температуре стенки. Поставим задачу: определить количество тепла, передаваемого через стенку. Будем считать процесс стационарным $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$. Это значит,

что стенка не накапливает и не отдает тепло. Сколько тепла получила, столько и отдала. Аналогичные рассуждения можно

привести в случае диффузии. При стационарном состоянии $\frac{\partial c}{\partial \tau} = 0$ стенка не накапливает и не отдает вещество. Сколько вещества получила, столько и отдала.

Дифференциальные уравнения теплопроводности и диффузии для одномерного поля запишутся

$$\begin{split} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} & \frac{\partial c}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \\ \text{Так как } \frac{\partial t}{\partial \tau} &= 0 \text{ и } \frac{\partial c}{\partial \tau} = 0 \text{, to} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= 0 & \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0. \end{split}$$

Проинтегрируем эти уравнения дважды

$$\frac{\partial t}{\partial x} = C_1$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = C_1$$

$$t = C_1 x + C_2$$

$$c = C_1 x + C_2;$$
 при $x = 0$ $t_1 = C_2$ при $x = 0$ $c_1 = C_2;$

при
$$x=S$$
 $t_2=C_1S+t_1$ при $x=S$ $c_2=C_1S+c_1$;
$$C_1=\frac{t_2-t_1}{S}=-\frac{t_1-t_2}{S}$$

$$C_1=\frac{c_2-c_1}{S}=-\frac{c_1-c_2}{S}$$
;
$$t=\frac{t_2-t_1}{S}x+t_1=t_1-\frac{t_1-t_2}{S}x$$
 (5.1)
$$c=\frac{c_2-c_1}{S}x+c_1=c_1-\frac{c_1-c_2}{S}x$$
.

Температура (концентрация) по толщине плоской стенки меняется по линейному закону.

Если отсчет избыточной температуры в стенке вести от наименьшей заданной температуры t_2 , то уравнение можно привести к безразмерному виду. Обозначим

 $\Delta t = t - t_2$ - текущий температурный напор или избыточная температура;

 $\Delta t_0 = t_1 - t_2$ - полный температурный напор или наибольшая избыточная температура.

Вычтем из уравнения (5.1) величину t_2 .

$$t - t_2 = t_1 - t_2 - \frac{t_1 - t_2}{S}x;$$
 $\Delta t = \Delta t_0 - \frac{\Delta t_0}{S}x;$ $\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 1 - \frac{x}{S}.$

Обозначим через $\theta = \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$ – безразмерный температурный

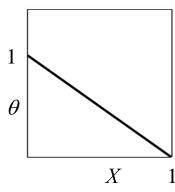


Рисунок 5.2 – Распределение температуры в стенке

напор или безразмерная избыточная температура; X – относительная координата. Тогда

$$\theta = 1 - X. \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) является универсальным. Его универсальность заключается в том, что распределение температуры в стенке можно представить единой прямой в

отрезках на осях для любого заданного значения t_1 и t_2 . В ряде случаев пользоваться безразмерным уравнением весьма удобно.

Пример. На поверхностях стенки поддерживается температура t_1 =100°С и t_2 =20°С. Определить температуру t в стенке с относительной координатой X. Наибольший температурный напор в стенке $\Delta t_0 = t_1 - t_2 = 100 - 20 = 80$ °С. По графику (рисунок 5.2) при X=0,5 θ =0,5. Тогда текущий

температурный напор $\Delta t = \theta \cdot \Delta t_0 = 0.5 \cdot 80 = 40$ °C. Из выражения $\Delta t = t - t_2$ температура

$$t = t_2 + \Delta t = 20 + 40 = 60$$
 °C.

Рассмотрим стенку, толщина которой S=40мм. Температура на поверхностях стенки t_1 =100°С и t_2 =20°С. Определить температуру в точке x=20мм (относительная координата X=0,5). По уравнению (5.1) определяем

$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{S} x = 100 - \frac{100 - 20}{0.04} 0.02 = 60$$
°C.

Плотность теплового потока. Плотность потока вещества.

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \qquad j = -D \frac{\partial c}{\partial x} ;$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = C_1 \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = C_1 ;$$

$$q = -\lambda \left(-\frac{t_1 - t_2}{S} \right) = \lambda \frac{t_1 - t_2}{S} \qquad j = -D \left(-\frac{c_1 - c_2}{S} \right) = D \frac{c_1 - c_2}{S}$$

Количество тепла, которое передается через плоскую стенку

$$Q = qF\tau = \lambda \frac{t_1 - t_2}{S} F\tau.$$
 (5.3)

Количество вещества, которое передается через плоскую стенку

$$G = jF\tau = D\frac{c_1 - c_2}{S}F\tau. \tag{5.4}$$

Выражение для плотности теплового потока

$$q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{S}$$

можно записать по другому

$$q = \frac{t_1 - t_2}{S / \lambda}.$$

Величину S/λ называют *термическим сопротивлением* и обозначают R, размерность термического сопротивления $\frac{M^2 \cdot K}{B_T}$.

$$R = \frac{S}{\lambda} = \frac{\Delta t}{a}$$
.

Термическое сопротивление определяет падение

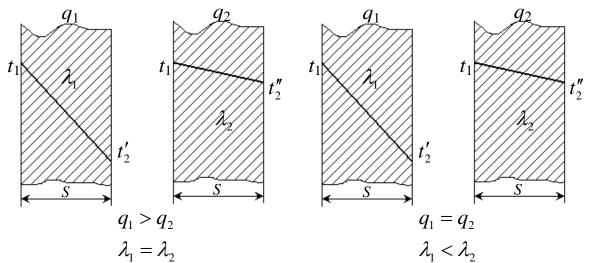


Рисунок 5.3. – Характер изменения температуры по толщине стенки

температуры на единицу плотности теплового потока. Чем больше термическое сопротивление, тем меньше плотность теплового потока, передаваемого через стенку (рисунок 5.3). Термическое сопротивление прямо пропорционально толщине стенки и обратно пропорционально коэффициенту теплопроводности.

Из уравнения для плотности теплового потока имеем

$$\frac{q}{\lambda} = \frac{t_1 - t_2}{S}.$$

Подставляя его в уравнение (а), получим

$$t = t_1 - \frac{q}{\lambda} x. (5.5)$$

Из уравнения (5.5) следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает быстрее, чем больше плотность теплового потока, а при равенстве плотностей тепловых потоков температура убывает тем быстрее, чем меньше коэффициент теплопроводности.

5.2 Передача тепла теплопроводностью через плоскую многослойную стенку (граничные условия 1 рода)

Для начала рассмотрим передачу тепла теплопроводностью через двухслойную плоскую стенку. Предполагается плотный контакт между слоями. По условию стационарности величина плотности теплового потока при переходе от слоя к слою не меняется, т.е. $q_1 = q_2 = q$. Температура на поверхностях стенки поддерживается постоянной и равной t_1 и t_3 . Температура на

стыке слоев t_2 является неизвестной (рисунок 5.4).

Запишем закон Фурье для 1 и 2 слоя

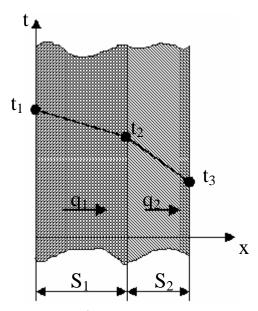


Рисунок 5.4 — Теплопроводность плоской двухслойной стенки температурный напор

$$q_{1} = q = \frac{t_{1} - t_{2}}{S_{1}/\lambda_{1}};$$

$$q_{2} = q = \frac{t_{2} - t_{3}}{S_{2}/\lambda_{2}}.$$

Выразим из этих уравнений температурные напоры

$$t_1 - t_2 = q \frac{S_1}{\lambda_1},$$

 $t_2 - t_3 = q \frac{S_2}{\lambda_2}.$

Найдем суммарный

$$t_1 - t_3 = q \bigg(\frac{S_1}{\lambda_1} + \frac{S_2}{\lambda_2} \bigg).$$
 Откуда
$$q = \frac{t_1 - t_3}{\frac{S_1}{\lambda_1} + \frac{S_2}{\lambda_2}}.$$

Температура t_2 на стыке слоев равна $t_2 = t_1 - q \frac{S_1}{\lambda_1}$.

По условию стационарности можно записать

$$q = \frac{\Delta t_1}{R_1}; \quad q = \frac{\Delta t_2}{R_2}; \quad \frac{\Delta t_1}{R_1} = \frac{\Delta t_2}{R_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Для многослойной стенки плотность теплового потока будет равна

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\lambda_i}} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n R_i}.$$
 (5.6)

Температура t_{k+1} на стыке k и k+1 слоя равна

$$t_{k+1} = t_1 - q \sum_{i=1}^k \frac{S_i}{\lambda_i}; \quad t_{k+1} = t_1 - q \sum_{i=1}^k R_i .$$

Для определения температуры на стыке k и k+1 слоя необходимо из температуры поверхности t_1 вычесть произведение плотности теплового потока на сумму тепловых сопротивлений, пройденных тепловым потоком до того места, где определяется температура.

5.3 Передача тепла теплопроводностью через цилиндрическую однослойную стенку (граничные условия 1го рода)

На пути общего теплового потока изменяется периметр элементарных слоев трубы (рисунок 5.5), поэтому удельные тепловые потоки не будут равны. Условием стационарного теплового состояния является равенство количества тепла,

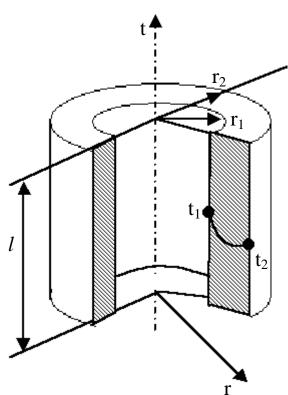


Рисунок 5.5 – Теплопроводность цилиндрической стенки

которое поступает к цилиндрической стенке через внутреннюю поверхность за единицу времени, и количества тепла, которое отводится через наружную поверхность за единицу времени

$$Q^* = q \cdot F.$$

По закону Фурье плотность теплового потока

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}.$$

Поверхность трубы радиусом r равняется $F = 2\pi rl$.

Тогда

$$Q^* = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} 2\pi r l.$$

Разделим переменные

$$\partial t = -\frac{Q^*}{2\pi l \lambda} \frac{\partial r}{r}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$t = -\frac{Q^*}{2\pi l \lambda} \ln r + C. \tag{5.7}$$

Постоянную интегрирования получим из начальных условий:

при $r=r_1$ $t=t_1$

$$t_1 = -\frac{Q^*}{2\pi l \lambda} \ln r_1 + C,$$

$$C = t_1 + \frac{Q^*}{2\pi l \lambda} \ln r_1.$$

откуда

Подставив значение постоянной интегрирования в уравнение (5.7), получим

$$t = t_1 + \frac{Q^*}{2\pi l\lambda} \ln r_1 - \frac{Q^*}{2\pi l\lambda} \ln r = t_1 - \frac{Q^*}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r}{r_1}.$$
 (5.8)

Из этого уравнения видно, что температура по толщине цилиндрической стенки меняется по логарифмическому закону.

Воспользовавшись температурой на другой границе при $r=r_2$, получим

$$t_{2} = t_{1} - \frac{Q^{*}}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}},$$

$$Q^{*} = \frac{2\pi l (t_{1} - t_{2})}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}}}.$$

Подставив значение теплового потока Q^* в уравнение (5.8), получим

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{t_1 \ln \frac{r_2}{r} + t_2 \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Аналогичное выражение можно получить и для концентрации вещества при диффузии

$$c = c_1 - (c_1 - c_2) \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{c_1 \ln \frac{r_2}{r} + c_2 \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$
 (5.9)

Плотность теплового потока через внутреннюю поверхность трубы

$$q_{1} = \frac{Q^{*}}{F_{1}}, \quad q_{1} = \frac{2\pi l(t_{1} - t_{2})}{2\pi l r_{1} \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}}} = \frac{(t_{1} - t_{2})}{\frac{r_{1}}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}}}, \tag{5.10}$$

через наружную поверхность

$$q_{2} = \frac{Q^{*}}{F_{2}} = \frac{2\pi l(t_{1} - t_{2})}{2\pi l r_{2} \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}}} = \frac{(t_{1} - t_{2})}{\frac{r_{2}}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}}}.$$
 (5.11)

Так как $r_1 < r_2$, то $q_1 > q_2$.

В знаменателе стоит тепловое сопротивление цилиндрической стенки.

В большинстве случаев удобно рассматривать тепловой поток, передаваемый через единицу длины

$$q_{l} = \frac{Q^{*}}{l} = \frac{2\pi(t_{1} - t_{2})}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}}}.$$
 (5.12)

Величину q_l называют *линейной плотностью теплового потока*, линейная плотность теплового потока имеет размерность Bt/m.

В знаменателе стоит величина $R_l = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}$, которая

называется линейным термическим сопротивлением цилиндрической стенки. Линейное термическое сопротивление имеет размерность $[R_I] = (M \cdot K)/BT$.

Линейная плотность потока вещества частиц (молей)/(м·с)

$$j_{l} = \frac{2\pi(c_{1} - c_{2})}{\frac{1}{D} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}}}.$$
 (5.13)

Плотность потока вещества через внутреннюю поверхность трубы

$$j_1 = \frac{(c_1 - c_2)}{\frac{r_1}{D} \ln \frac{r_2}{r}},\tag{5.14}$$

Через наружную поверхность

$$j_2 = \frac{(c_1 - c_2)}{\frac{r_2}{D} \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$
 (5.15)

5.4 Передача тепла теплопроводностью через цилиндрическую многослойную стенку (граничные условия 1-го рода)

Предполагается, что между трубами существует плотный

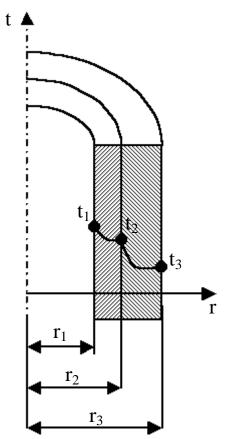


Рисунок 5.6 – Двухслойная цилиндрическая стенка

Теплопроводность контакт. цилиндрического первого слоя λ_1 , второго λ_2 . При стационарном тепловом состоянии количество тепла, которое подводится к первому цилиндрическому слою единицу времени, равно количеству тепла, которое передается через первую цилиндрическую стенку единицу времени, И равно количеству тепла, которое передается в единицу времени через второй цилиндрический слой, т.е. $Q_1^* = Q_2^* = Q^*$. На поверхностях поддерживается температура t_1 и t_3 (рис. 5.6).

Тепловой поток, который передается теплопроводностью

через первый цилиндрический слой

$$Q_{I}^{*} = Q^{*} = \frac{2\pi l(t_{I} - t_{2})}{\frac{1}{\lambda_{I}} ln \frac{r_{2}}{r_{I}}},$$
 (5.16)

через второй цилиндрический слой

$$Q_{2}^{*} = Q^{*} = \frac{2\pi l(t_{2} - t_{3})}{\frac{1}{\lambda_{2}} ln \frac{r_{3}}{r_{2}}}.$$

Выразим из этих уравнений температурные напоры

$$t_1 - t_2 = \frac{Q^*}{2\pi l} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$t_2 - t_3 = \frac{Q^*}{2\pi l} \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}.$$

Суммарный температурный напор

$$t_1 - t_3 = \frac{Q^*}{2\pi l} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right), \tag{5.17}$$

откуда

$$Q^* = \frac{2\pi l (t_1 - t_3)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Температура на стыке слоев

$$t_2 = t_1 - \frac{Q^*}{2\pi l} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = t_1 - \frac{q_1}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Для *п*-слойной цилиндрической стенки

$$Q^* = \frac{2\pi l \left(t_1 - t_{n+1}\right)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}.$$
 (5.18)

Линейная плотность теплового потока, Вт/м

$$q_{l} = \frac{Q^{*}}{l} = \frac{2\pi (t_{1} - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{i}} \ln \frac{r_{i+1}}{r_{i}}}.$$
 (5.19)

Температура на стыке k и k+1 цилиндрического слоя

$$t_{k+1} = t_1 - \frac{q_l}{2\pi} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}.$$
 (5.20)

5.5 Передача тепла теплопроводностью через шаровую стенку (граничные условия I рода)

Рассмотрим полый шар с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 (рисунок 5.7). Стенка шара состоит из однородного материала, коэффициент теплопроводности постоянен и равный λ . Температуры внутренней и внешней поверхности шара t_1 и t_2 ($t_1 > t_2$). Поставим задачу: определить количество тепла, которое передается через шаровую стенку, а также распределение температуры по толщине шаровой стенки.

Процесс будем считать стационарным $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$.

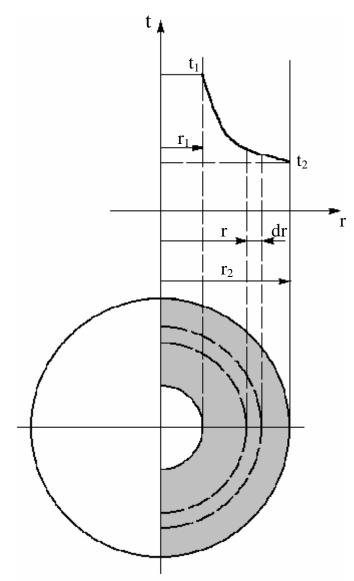


Рисунок 5.7 – Изменение температуры по толщине шаровой стенки

Это значит, что шаровая стенка не накапливает и не отдает тепло. Сколько тепла получила, столько и отдала.

Изотермические поверхности представляют концентрические шаровые поверхности.

Выделим внутри стенки слой радиусом r и толщиной dr, ограниченный изотермическими поверхностями.

Согласно закону Фурье тепловой поток, Вт, проходящий через этот слой равен

$$Q^* = q \cdot F = -\lambda \frac{dt}{dr} 4\pi r^2$$

Разделив переменные, получим

$$dt = -\frac{Q^*}{4\pi\lambda} \frac{dr}{r^2}.$$

После интегрирования

имеем

$$t = \frac{Q^*}{4\pi\lambda} \frac{1}{r} + C. \tag{5.21}$$

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся граничными условиями:

при
$$r=r_1 \implies t=t_1$$

$$t_1 = \frac{Q^*}{4\pi\lambda} \frac{1}{r_1} + C \implies C = t_1 - \frac{Q^*}{4\pi\lambda} \frac{1}{r_1}.$$

Подставив значение постоянной интегрирования в уравнение (5.21), получим:

$$t = \frac{Q^*}{4\pi\lambda} \frac{1}{r} + t_1 - \frac{Q^*}{4\pi\lambda} \frac{1}{r_1};$$

$$t = t_1 - \frac{Q^*}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$
 (5.22)

Из уравнения (5.22) видно, что температура по толщине шаровой стенки изменяется по гиперболе.

При $r=r_2 \implies t=t_2$, тогда

$$t_2 = t_1 - \frac{Q^*}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Откуда

$$Q^* = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}},$$

$$Q^* = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)r_1r_2}{r_2 - r_1}.$$
(5.23)

или

Обозначив толщину стенки через
$$\delta = r_2 - r_1$$
, получим

$$Q^* = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)r_1r_2}{\delta}.$$

Подставив значение теплового потока Q^* из уравнения (5.23) в уравнение (5.22), получим

$$t = t_1 - \frac{(t_1 - t_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right).$$

Уравнение (5.23) перепишем в виде

$$Q^* = \frac{4\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}.$$

Если шаровая стенка состоит из n слоев, то при стационарном тепловом состоянии тепловые потоки через каждый слой равны между собой

$$Q_1^* = Q_2^* = Q_3^* = \dots = Q^*.$$

Тепловой поток через первый слой

$$Q_{1}^{*} = Q^{*} = \frac{4\pi(t_{1} - t_{2})}{\frac{1}{\lambda_{1}} \left(\frac{1}{r_{1}} - \frac{1}{r_{2}}\right)}.$$

Тепловой поток через второй слой

$$Q_2^* = Q^* = \frac{4\pi(t_2 - t_3)}{\frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)}.$$

.....

Тепловой поток через *n*-ый слой

$$Q_n^* = Q^* = \frac{4\pi (t_n - t_{n+1})}{\frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}}\right)}.$$
 (5.24)

Выразим температурные напоры

$$t_{1} - t_{2} = \frac{Q^{*}}{4\pi\lambda_{1}} \left(\frac{1}{r_{1}} - \frac{1}{r_{2}}\right);$$

$$t_{2} - t_{3} = \frac{Q^{*}}{4\pi\lambda_{2}} \left(\frac{1}{r_{2}} - \frac{1}{r_{3}}\right);$$

 $t_n - t_{n+1} = \frac{Q^*}{4\pi\lambda_n} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}} \right). \tag{5.25}$

Суммарный температурный напор

$$t_1 - t_{n+1} = \frac{Q^*}{4\pi} \left[\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}} \right) \right].$$

Тогда

$$Q^* = \frac{4\pi (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right)}.$$
 (5.26)

5.6 Теплопроводность при наличии внутренних источников тепла

В рассмотренных ранее задачах внутренние источники тепла отсутствовали. Однако в ряде случаев внутри объектов исследования могут протекать процессы, в результате которых будет выделяться или поглощаться тепло. Примерами таких процессов могут служить: выделение джоулева тепла при прохождении электрического тока по проводникам, выделение или поглощение тепла при протекании ряда химических реакций.

При исследовании переноса тепла в таких случаях важно знать интенсивность объемного выделения (поглощения) тепла, которое количественно характеризуется плотностью объемного тепловыделения q_{ν} Вт/м³. Если величина q_{ν} положительна, то говорят, что в теле имеются положительные источники тепла. При отрицательных значениях q_{ν} имеются отрицательные источники (или стоки) тепла.

Для стационарного режима $\partial t/\partial \tau = 0$ дифференциальное уравнение при наличии источников тепла имеет вид

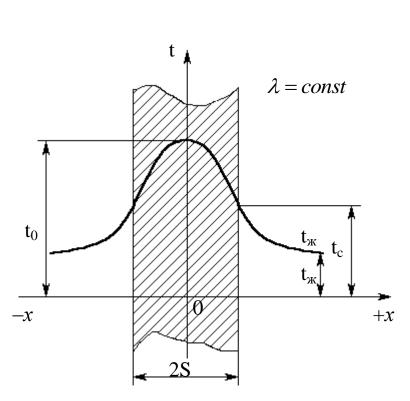


Рисунок 5.8 – Распределение температуры в пластине

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

<u>Теплопроводность</u> <u>однородной пластины.</u>

Рассмотрим длинную пластину, толщина которой 2S величина малая по сравнению с двумя другими размерами.

Источники тепла равномерно распределены по всему объему и q_v =const. Заданы коэффициенты теплоотдачи α и температура жидкости вдали от

пластины $t_{\mathbb{K}}$, причем $\alpha = const$ и $t_{\mathbb{K}} = const$ (рисунок 5.8).

Благодаря равномерному охлаждению температуры обеих поверхностей пластины одинаковы. При указанных условиях температура пластины будет изменяться только вдоль оси x. Температуры на оси пластины и поверхности обозначим через t_0 и $t_{\rm c}$, эти температуры неизвестны Необходимо найти поле температур и количество тепла, отданного в окружающее пространство.

Дифференциальное уравнение в рассматриваемом случае примет вид

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

Граничные условия:

при
$$x = \pm S$$
 $\pm \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=\pm S} = \alpha (t_c - t_{xc}).$

Поскольку граничные условия для обеих сторон пластины одинаковы, температурное поле внутри пластины должно быть симметричным относительно плоскости x=0. Тепло с одинаковой интенсивностью отводится через левую и правую поверхности тела Одинаково и тепловыделение в обеих половинах пластины. Это означает, что можно далее рассматривать лишь одну половину пластины, например, правую и записать граничные условия для нее.

$$x = 0; \quad \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = 0;$$

$$x = S; \quad -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=S} = \alpha (t_c - t_{c}).$$

После интегрирования получим

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_{\nu}x}{\lambda} + C_1 \tag{5.27}$$

$$t = -\frac{q_{\nu}x^2}{2\lambda} + C_1x + C_2. \tag{5.28}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

при
$$x=0$$
 $\frac{dt}{dx}=0$ и $C_1=0$;

при
$$x = S$$
 $-\lambda \left(\frac{dt}{dx}\right)_{r=S} = \alpha (t_c - t_{sc}).$ (5.29)

Из уравнения (5.27)
$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=S} = -\frac{q_v S}{\lambda}.$$
 (5.30)

Тогда сравнивая (5.29) и (5.30)

$$t_c = \frac{q_v S}{\alpha} + t_{xc}. \tag{5.31}$$

Подставив выражение (5.31) в (5.28), получим

$$\frac{q_{v}S}{\alpha} + t_{xc} + \frac{q_{v}S^{2}}{2\lambda} = C_{2}.$$

Подставив значения постоянных C_1 и C_2 в выражение (5.28), найдем уравнение температурного поля

$$t_x = t_{x} + \frac{q_v S}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} (S^2 - x^2).$$
 (5.32)

Продифференцируем уравнение (е)

$$dt = -\frac{q_v}{2\lambda} 2x dx$$
, $-\lambda \frac{dt}{dx} = q_v \cdot x$; $q = q_v \cdot x$.

В рассматриваемой задаче тепловой поток изменяется вдоль оси x $q=q_{_{\rm N}}\cdot x$.

При x=0 и q=0 (это следует из условия, что при x=0 $\left(dt/dx \right)_{x=0} = 0$).

Тепловой поток с единицы поверхности пластины при x=S

$$q = \alpha (t_c - t_{wc}) = q_v S$$
, BT/M²,

а общее количество тепла, отданное всей поверхностью в единицу времени (вся поверхность F равна двум боковым поверхностям F_1)

$$Q = q \cdot F = q_v \cdot S \cdot 2F_1, \text{ Bt.}$$
 (5.33)

Из уравнения (5.32) следует, что температура в плоской стенке в случае симметричной задачи распределяется по параболическому закону.

Если в уравнение (5.32) положить $\alpha = \infty$, то полученное выражение будет представлять температурное поле при граничных условиях I рода, ибо при $\alpha = \infty$ $t_{\infty} = t_{c}$.

С учетом сказанного уравнение (е) принимает вид

$$t = t_c + \frac{q_v}{2\lambda} \left(S^2 - x^2 \right).$$

Температура на оси симметрии пластины при x=0

$$t_0 = t_c + \frac{q_v S^2}{2\lambda}.$$

Перепад температур между осью симметрии стенки и ее поверхностью равен

$$t_0 - t_c = \frac{q_v S^2}{2\lambda}. (5.34)$$

До сих пор полагали, что коэффициент теплопроводности материала стенки постоянен. При. больших перепадах температур может возникнуть необходимость в учете зависимости коэффициента теплопроводности от температуры Часто эта зависимость имеет линейный характер, т.е.

$$\lambda = \lambda_0 (1 + b \cdot t)$$

И

$$q_{\nu}x = -\lambda_0 (1 + b \cdot t) \frac{dt}{dx}.$$
 (5.35)

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (л), получаем

$$t + b\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{\lambda_0} q_v \frac{x^2}{2} + C.$$
 (5.36)

При x=0 $t=t_0$ из уравнения (5.36) получим $C=t_0+b\frac{t_0^2}{2}$.

Подставляя найденное значение C в уравнение (5.36) получим

$$t + \frac{b}{2}t^{2} = -\frac{1}{\lambda_{0}}q_{v}\frac{x^{2}}{2} + t_{0} + \frac{b}{2}t_{0}^{2};$$

$$t^{2} + \frac{2}{b}t + \frac{2}{\lambda_{0}b}q_{v}\frac{x^{2}}{2} - \frac{2}{b}t_{0} - t_{0}^{2} = 0.$$

Решая полученное уравнение, найдем

$$\begin{split} t &= -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{b}t_0 + t_0^2 - \frac{q_v x^2}{b\lambda_0}} \,; \\ t &= -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_0\right)^2 - \frac{q_v x^2}{b\lambda_0}} \,. \end{split}$$

6 СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ СРЕДАМИ

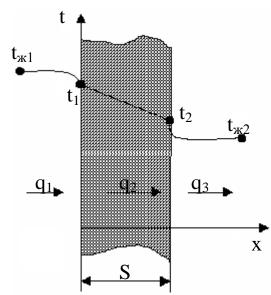


Рисунок 6.1 – Теплопередача через плоскую стенку

При рассмотрении процесса переноса тепла от нагретого теплоносителя к холодному через твердую стенку задача еще более усложняется. Здесь процесс определяется совокупным действием рассмотренных элементарных явлений.

В качестве примера рассмотрим процесс нагревания воды в чайнике. Тепло от горения газа к внешней поверхности чайника передается излучением и конвекцией, через стенку чайника теплопроводностью, от

внутренней поверхности к воде — конвекцией и теплопроводностью. Передача тепла от одной подвижной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их однородную или многослойную твердую стенку любой формы называется теплопередачей.

6.1 Передача тепла от одной среды к другой через разделительную однородную или многослойную плоскую стенку

Имеется однородная плоская стенка с коэффициентом теплопроводности λ и толщиной S (рисунок 6.1). По одну сторону стенки находится горячая среда с температурой t_{∞} , по Температуры температурой холодная c другую поверхностей стенки неизвестны, обозначим t_1 ИХ Температуры жидкостей вдали от поверхности постоянны и лишь у поверхности в результате наличия пограничного слоя резко изменяются от температуры жидкости до температуры стенки. Значение суммарного коэффициента теплоотдачи на горячей стороне равно $\alpha' = \alpha'_{\kappa} + \alpha'_{\pi}$, а на холодной $\alpha'' = \alpha''_{\kappa} + \alpha''_{\pi}$.

При стационарном тепловом состоянии количество тепла, переданное от горячей жидкости к стенке, равно количеству тепла, переданному через стенку, и равно количеству тепла,

отданному от стенки к холодной жидкости. Следовательно, для плотности теплового потока q можно написать выражение

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$
.

От подвижной среды к стенке тепло может передаваться конвекцией и излучением.

Плотность теплового потока от жидкости к стенке запишется

$$q_{I} = q = \alpha' (t_{\text{wel}} - t_{I}). \tag{6.1}$$

По толщине стенки тепло передается теплопроводностью, плотность теплового потока

$$q_2 = q = \frac{t_1 - t_2}{S/\lambda}. (6.2)$$

От стенки к подвижной среде тепло может передаваться конвекцией и излучением, тогда

$$q_{3} = q = \alpha''(t_{2} - t_{sc2}). \tag{6.3}$$

Из уравнений (6.1), (6.2), (6.3) выразим температурные напоры

$$t_{\kappa_1} - t_1 = q \frac{1}{\alpha'}, \qquad t_1 - t_2 = q \frac{S}{\lambda},$$

$$t_2 - t_{\kappa_2} = q \frac{1}{\alpha''}.$$

Суммарный температурный напор

$$t_{\mathcal{H}_1} - t_{\mathcal{H}_2} = q \left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{S}{\lambda} + \frac{1}{\alpha''} \right)$$

откуда

$$q = \frac{t_{\kappa_1} - t_{\kappa_2}}{\frac{1}{\alpha'} + \frac{S}{\lambda} + \frac{1}{\alpha''}},$$

где 1/a' — внешнее тепловое сопротивление теплоотдаче со стороны горячего теплоносителя, $\frac{M^2 \cdot K}{BT}$;

 $S\!/\!\lambda$ — термическое (тепловое) сопротивление теплопроводности стенки, $\frac{\text{M}^2 \cdot \text{K}}{\text{Bt}};$

1/a'' — внешнее термическое сопротивление теплоотдаче со стороны холодного теплоносителя, $\frac{M^2 \cdot K}{R_T}$.

Обозначим через

$$\kappa = \frac{1}{\frac{1}{\alpha'} + \frac{S}{\lambda} + \frac{1}{\alpha''}}, BT/(M^2 \cdot K).$$

Величина k называется коэффициентом теплопередачи. Коэффициент теплопередачи — это количество тепла, передаваемое от одной среды к другой через разделительную стенку за единицу времени через единицу поверхности теплообмена при разности температур жидкостей 1 градус.

Плотность теплового потока запишется

$$q = k \left(t_{\alpha c_1} - t_{\alpha c_2} \right). \tag{6.4}$$

По закону Ньютона - Рихмана плотность теплового потока выражается

$$q = \alpha (t_{\alpha c_1} - t_{\alpha c_2}). \tag{6.5}$$

где α – коэффициент теплоотдачи.

Разница между уравнениями (6.4) и (6.5) состоит в том, что коэффициент теплопередачи k в уравнении (6.4) характеризует передачу тепла от одной среды к другой через разделительную стенку, а коэффициент теплоотдачи α в уравнении (6.5) характеризует передачу тепла от одной среды непосредственно к другой.

В случае многослойной стенки, состоящей из n плотно прилегающих слоев, в выражении для плотности потока добавится сумма термических сопротивлений слоев стенки, т.е.

$$q = rac{t_{_{\mathcal{H}_{1}}} - t_{_{\mathcal{H}_{2}}}}{rac{1}{lpha'} + \sum\limits_{i=1}^{n} rac{S_{i}}{\lambda_{i}} + rac{1}{lpha''}}$$
 . слоев:

Температура на стыке слоев: $t_{_{\kappa}}=t_{_{\mathcal{H}^{1}}}-q\sum_{i=1}^{k}R_{_{i}}=t_{_{\mathcal{H}^{1}}}-q\bigg(\frac{1}{\alpha'}+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{S_{_{i}}}{\lambda_{.}}\bigg).$

6.2 Передача тепла от одной среды к другой через цилиндрическую однослойную стенку

Пусть имеем цилиндрическую однослойную стенку с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 . Внутри трубы находится

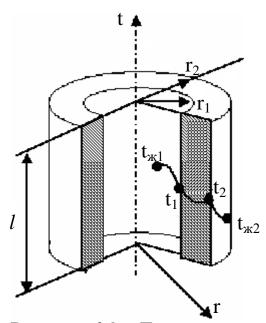


Рисунок 6.2 – Теплопередача через однослойную цилиндрическую стенку.

жидкость с температурой $t_{\kappa 1}$, коэффициент суммарный жидкости теплоотдачи otor T α' , снаружи стенке трубы температура жидкости $t_{\infty 2}$, коэффициент суммарный теплоотдачи наружной OTповерхности К холодной жидкости α'' . Коэффициент теплопроводности трубы λ (рисунок 6.2). При установившемся тепколичество ЛОВОМ состоянии тепла, подводимое за единицу времени через единичную длину трубы OT горячего теплоносителя внутренней К поверхности стенки, равно

количеству тепла, которое передается через стенку за единицу времени через единичную длину трубы и равно количеству тепла, которое отводится от наружной поверхности трубы за единицу времени через единичную длину трубы к холодному теплоносителю.

$$Q_1^* = Q_2^* = Q_3^* = Q^*$$

или

$$q_{l_1} = q_{l_2} = q_{l_3} = q_{l}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} q_{l1} &= q_l = \alpha' (t_{\kappa l1} - t_1) 2\pi r_1 \\ q_{l2} &= q_l = \frac{2\pi (t_1 - t_2)}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}} \\ q_{l3} &= q_l = \alpha'' (t_2 - t_{\kappa l2}) 2\pi r_2. \end{aligned}$$

Выразим из этих уравнений температурные напоры

$$t_{\alpha 1} - t_1 = \frac{q_1}{2\pi} \frac{1}{\alpha' r_1} \tag{6.7}$$

$$t_1 - t_2 = \frac{q_1}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}$$
 (6.8)

$$t_2 - t_{x2} = \frac{q_1}{2\pi} \frac{1}{\alpha'' r_2} \tag{6.9}$$

Суммарный температурный напор найдем, просуммировав левые и правые части уравнений (6.7), (6.8), (6.9):

$$t_{\alpha_1} - t_{\alpha_2} = \frac{q_l}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha' r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha'' r_2} \right).$$

Откуда линейная плотность теплового потока, Вт/м

$$q_{l} = \frac{2\pi \left(t_{\alpha c_{1}} - t_{\alpha c_{2}}\right)}{\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} + \frac{1}{\alpha'' r_{2}}} = \kappa_{l} 2\pi \left(t_{\alpha c_{1}} - t_{\alpha c_{2}}\right). \tag{6.10}$$

Линейный коэффициент теплопередачи (на 1м трубы), BT (м · К)

$$\kappa_{l} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} + \frac{1}{\alpha'' r_{2}}} . \tag{6.11}$$

Величина, обратная линейному коэффициенту передачи, $1/k_1$, называется линейным термическим сопротивлением теплопередачи, м · К/Вт

$$R_{l} = \frac{1}{\alpha' r_{1}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} + \frac{1}{\alpha'' r_{2}}$$

 $R_l = \frac{1}{\alpha' r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha'' r_2} \cdot$ Термическое сопротивление равняется сумме термического теплоотдачи от горячего теплоносителя сопротивления внутренней стенке $\frac{1}{\alpha'r}$, термического сопротивления теплопроводности стенки $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r}$ и термического сопротивления

теплоотдачи от наружной поверхности стенки к холодному теплоносителю $\frac{1}{\alpha'' r_2}$.

Значения температур на поверхностях трубы можно определить как:

$$t_1 = t_{\alpha c_1} - \frac{q_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha' r_1} \tag{6.12}$$

$$t_{2} = t_{1} - \frac{q_{l}}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} = t_{\alpha c_{1}} - \frac{q_{l}}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} \right)$$
(6.13)

ИЛИ

$$t_2 = t_{\alpha_2} + q_l \cdot \frac{1}{\alpha'' r_2} \ . \tag{6.14}$$

6.3 Передача тепла от одной среды к другой через цилиндрическую многослойную стенку

Рассмотрим передачу тепла через многослойную, например, двухслойную цилиндрическую стенку. Известны радиусы каждого слоя (рисунок 6.3). Коэффициент теплопроводности первой цилиндрической стенки λ_1 , второй — λ_2 . Температура горячего теплоносителя t_{∞_1} , коэффициент теплоотдачи α' , температура холодного теплоносителя t_{∞_2} , коэффициент теплоотдачи α'' . При стационарном тепловом состоянии количество тепла, которое передается от горячей среды к стенке равно количеству тепла, которое передается через первую цилиндрическую стенку, равно количеству тепла, которое передается через вторую цилиндрическую стенку и равно количеству тепла, которое передается от наружной поверхности цилиндрической стенки к холодной среде, т.е. $q_{l_1} = q_{l_2} = q_{l_3} = q_{l_4} = q_{l}$. Тепло от горячей среды к внутренней поверхности многослойной стенки может передаваться конвекцией и излучением

$$q_{l1} = q_l = \alpha' (t_{sc1} - t_1) 2\pi r_1,$$
 (6.15)

по цилиндрическим слоям тепло передается теплопроводностью

$$q_{l2} = q_l = \frac{2\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad q_{l3} = q_l = \frac{2\pi(t_2 - t_3)}{\frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}, \tag{6.16}$$

от наружной поверхности трубы к холодной среде тепло, как правило, передается конвекцией и излучением

$$q_{14} = q_1 = \alpha'' (t_3 - t_{3C_2}) 2\pi r_3. \tag{6.17}$$

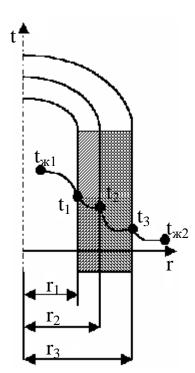


Рисунок 6.3 – Теплопередача через многослойную цилиндрическую стенку

Определим температурные напоры

$$t_{3c_1} - t_1 = \frac{q_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha' r_1},$$

$$t_1 - t_2 = \frac{q_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$t_2 - t_3 = \frac{q_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2},$$

$$t_3 - t_{\infty_2} = \frac{q_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha'' r_3}.$$

Складывая левые и правые части, получим полный температурный напор

$$t_{3c_1} - t_{3c_2} = \frac{q_l}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha' r_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\alpha'' r_3} \right)$$

Откуда линейная плотность теплового потока, Вт/м

$$q_{l} = \frac{2\pi \left(t_{\kappa_{1}} - t_{\kappa_{2}}\right)}{\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{1}} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{2}} \ln \frac{r_{3}}{r_{2}} + \frac{1}{\alpha'' r_{3}}}{\frac{1}{\alpha'' r_{3}}} \cdot$$
ение температур по толщине двухслойной стенки показано на рисунке 6.3.

Распределение цилиндрической стенки показано на рисунке 6.3.

Линейный коэффициент теплопередачи, Вт/(м·К).

$$k_{l} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{1}} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{2}} \ln \frac{r_{3}}{r_{2}} + \frac{1}{\alpha'' r_{3}}}.$$
 (6.19)

Для многослойной цилиндрической стенки

$$k_{l} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{i}} \ln \frac{r_{i+1}}{r_{i}} + \frac{1}{\alpha'' r_{n+1}}}.$$
 (6.20)

Линейное термическое сопротивление, мК/Вт.

$$R_{l} = \left(\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{1}} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{2}} \ln \frac{r_{3}}{r_{2}} + \frac{1}{\alpha'' r_{3}}\right) \; .$$
 Для многослойной стенки трубы

$$R_{l} = \left(\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{i}} \ln \frac{r_{i+1}}{r_{i}} + \frac{1}{\alpha'' r_{n+1}}\right) . \tag{6.21}$$

Чтобы определить неизвестную температуру многослойной стенки, необходимо из температуры среды t_{∞} вычесть величину $q_{l/2\pi}$, умноженную на сумму линейных термических сопротивлений до этой температуры

$$t_{1} = t_{\alpha l_{1}} - \frac{q_{l}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha' r_{1}} = t_{\alpha l_{1}} - \frac{q_{l}}{2\pi} R_{l_{1}},$$

$$t_{2} = t_{\alpha l_{1}} - \frac{q_{l}}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{1}} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} \right) = t_{\alpha l_{1}} - \frac{q_{l}}{2\pi} (R_{l_{1}} + R_{l_{2}}),$$

$$t_{\kappa} = t_{\alpha l_{1}} - \frac{q_{l}}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha' r_{1}} + \sum_{i=1}^{\kappa-1} \frac{1}{\lambda_{i}} \ln \frac{r_{i+1}}{r_{i}} \right) = t_{\alpha l_{1}} - \frac{q_{l}}{2\pi} \sum_{i=1}^{k} R_{l_{i}}.$$

$$(6.22)$$

Критический 6.4 Тепловая изоляция трубопроводов. радиус изоляции

Рассмотрим влияние наружного радиуса на термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки. Эта задача возникает для цилиндрической трубы, а также для аналогичных задач, в которых внутренняя и наружная теплопередающие поверхности различны. Дело в том, что при нанесении изоляции на плоскую стенку поверхность теплопередачи не изменяется в направлении теплового потока, поэтому не возникает вопроса о принципиальной пригодности того или иного материала для тепловой изоляции стенки. Любой материал в той или иной тепловой При поток. степени уменьшит нанесении дополнительного слоя на цилиндрическую стенку одновременно теплопроводности сопротивления уменьшается ростом внешней среде (вследствие сопротивление теплоотдачи К увеличения теплоотдающей поверхности). Поэтому результат нанесения дополнительного слоя может быть двояким:

зависимости от теплопроводящих свойств материала этого слоя суммарный тепловой поток через изолированный цилиндр может как уменьшаться, так и увеличиваться. Отсюда возникает вопрос о выборе материала, пригодного для тепловой изоляции цилиндра.

Предположим, что имеем стальную трубу с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 , которую нужно изолировать для уменьшения потерь.

Полное термическое сопротивление изолированного трубопровода

$$R_{l,o\delta u_{1}} = \frac{1}{\alpha_{1}r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{cm}} \ln \frac{r_{2}}{r_{1}} + \frac{1}{\lambda_{u_{3}}} \ln \frac{r_{3}}{r_{2}} + \frac{1}{\alpha_{2}r_{3}}, \qquad (6.23)$$

где $R_{l1} = \frac{1}{\alpha_1 r_1}$ — линейное термическое сопротивление теплоот-

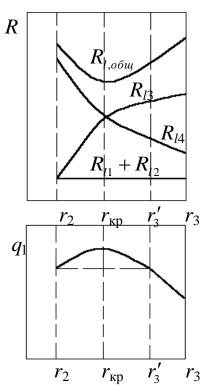


Рисунок 6.4 — Изменение линейных термических сопротивлений и линейной плотности теплового потока с изменением слоя изоляции

даче внутри трубы;

$$R_{l2} = \frac{1}{\lambda_{cm}} \ln \frac{r_2}{r_1} -$$
 линейное терми-

ческое сопротивление теплопроводности стенки трубы;

$$R_{l3} = \frac{1}{\lambda_{u3}} \ln \frac{r_3}{r_2}$$
 — линейное терми-

ческое сопротивление теплопроводности слоя изоляции;

$$R_{l4} = \frac{1}{\alpha_2 r_3}$$
 – линейное терми-

ческое сопротивление теплоотдаче на наружной поверхности.

Первые два слагаемых не зависят от r_3 , поэтому сумма их на графике (рисунок 6.4) может быть показана прямой линией. Два последних слагаемых зависят от r_3 : термическое сопротивление самой изоляции с ростом

 r_3 будет повышаться, термическое сопротивление на наружной поверхности изолированного трубопровода с увеличением r_3 будет понижаться.

Кривая суммарных потерь имеет явно выраженный минимум при наружном радиусе изоляции, который называется критическим. Линейный тепловой поток для рассматриваемого трубопровода будет изменяться в зависимости от r_3 как показано на рисунке 6.4.

Из рисунка 6.4 видно, что

- 1) при $r_3 < r_{\kappa p}$ увеличение толщины изоляции (т.е. увеличение r_3) будет приводить к росту теплопотерь.
- 2) при $r_3 > r_{\text{кр}}$ увеличение толщины изоляции будет уменьшать теплопотери.

Как видно из рисунка 6.4 только при достижении некоторой величины радиуса изоляции будут достигнуты теплопотери неизолированного трубопровода. Таким образом этот слой изоляции окажется затраченным напрасно. Очевидно, для данной трубы радиусом r_2 должен быть подобран такой изоляционный материал, для которого было бы соблюдено условие $r_{\rm кp} \le r_2$. Значение критического радиуса можно получить, если взять производную от $R_{l,oбщ}$ по r_3 , приравнять ее нулю и вычислить значение r_3 , — это и будет $r_{\rm kp}$

$$\frac{\partial \left(R_{l,o\delta u_{1}}^{A_{r}}\right)}{\partial \left(r_{3}\right)} = \frac{1}{\lambda_{u_{3}}r_{3}} - \frac{1}{\alpha_{2}r_{3}^{2}} = 0,$$

$$r_{\kappa p} = \frac{\lambda_{u_{3}}}{\alpha_{2}},$$

$$\lambda_{u_{3}} \leq \alpha_{2}r_{2}.$$
(6.24)

Если теплопроводность выбранного изоляционного материала удовлетворяет неравенству, то при нанесении его будет обеспечено убывание линейной плотности теплового потока q_1 , т.е. изоляция будет работать нормально.

6.5 Передача тепла от одной среды к другой через шаровую стенку (граничные условия III рода)

Рассмотрим однородную шаровую стенку с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Температура жидкости внутри шара t_{∞} , коэффициент теплоотдачи от жидкости к внутренней поверхности шара α_1 , температура жидкости снаружи t_{∞} , коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности шаровой стенки к жидкости α_2 (рисунок 6.5).

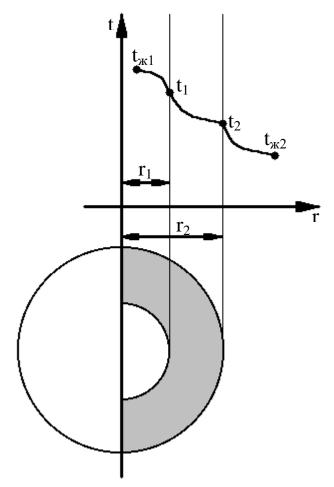


Рисунок 6.5 – Распределение температур при теплопередаче через шаровую стенку

Рассматриваем стационарное тепловое состояние, есть $\frac{\partial t}{\partial t} = 0$. Это значит, что тепла, количество которое передается OTжидкости к внутренней поверхности шара равно количеству тепла, которое передается через стенку шара теплопроводностью, И равно количеству тепла, которое передается наружной поверхности шара второй жидкости Q_3^*

$$Q_1^* = Q_2^* = Q_3^* = Q^*$$
, BT.

$$Q_{1}^{*} = Q^{*} = \alpha_{1} (t_{m_{1}} - t_{1}) 4\pi r_{1}^{2}$$
:

$$Q_{2}^{*} = Q^{*} = 4\pi \frac{(t_{1} - t_{2})}{\frac{1}{\lambda} (\frac{1}{r_{1}} - \frac{1}{r_{2}})};$$

$$Q_{3}^{*} = Q^{*} = \alpha_{2} (t_{2} - t_{\alpha e_{2}}) 4\pi r_{2}^{2}.$$

Выразим из полученных зависимостей температурные напоры.

$$\begin{split} t_{\alpha_{1}} - t_{1} &= \frac{Q^{*}}{4\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_{1} r_{1}^{2}}; \\ t_{1} - t_{2} &= \frac{Q^{*}}{4\pi} \cdot \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{r_{1}} - \frac{1}{r_{2}}\right); \end{split}$$

$$t_2 - t_{\alpha_2} = \frac{Q^*}{4\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_2 r_2^2}.$$

Суммарный температурный напор

$$t_{\alpha_{1}} - t_{\alpha_{2}} = \frac{Q^{*}}{4\pi} \left[\frac{1}{\alpha_{1}r_{1}^{2}} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{r_{1}} - \frac{1}{r_{2}} \right) + \frac{1}{\alpha_{2}r_{2}^{2}} \right],$$

откуда

$$Q^{*} = \frac{4\pi(t_{\kappa_{1}} - t_{\kappa_{2}})}{\frac{1}{\alpha_{1}r_{1}^{2}} + \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{r_{1}} - \frac{1}{r_{2}}) + \frac{1}{\alpha_{2}r_{2}^{2}}};$$

$$Q^{*} = \frac{\pi(t_{\kappa_{1}} - t_{\kappa_{2}})}{\frac{1}{4\alpha_{1}r_{1}^{2}} + \frac{1}{4\lambda}(\frac{1}{r_{1}} - \frac{1}{r_{2}}) + \frac{1}{4\alpha_{2}r_{2}^{2}}};$$

$$Q^{*} = \frac{\pi(t_{\kappa_{1}} - t_{\kappa_{2}})}{\frac{1}{\alpha_{1}d_{1}^{2}} + \frac{1}{2\lambda}(\frac{1}{d_{1}} - \frac{1}{d_{2}}) + \frac{1}{\alpha_{2}d_{2}^{2}}};$$

$$Q^{*} = k_{\omega}\pi(t_{\kappa_{1}} - t_{\kappa_{2}}). \tag{6.26}$$

Величина

$$k_{u} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{1}d_{1}^{2}} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_{1}} - \frac{1}{d_{2}}\right) + \frac{1}{\alpha_{2}d_{2}^{2}}}, B_{T}/K$$
(6.27)

называется коэффициентом теплопередачи шаровой стенки.

Обратная величина

$$\frac{1}{k_{u}} = \frac{1}{\alpha_{1}d_{1}^{2}} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_{1}} - \frac{1}{d_{2}} \right) + \frac{1}{\alpha_{2}d_{2}^{2}}, \text{ K/BT}$$
 (6.28)

называется термическим сопротивлением теплопередачи шаровой стенки.

6.6 Пути интенсификации теплопередач

Из уравнения теплопередачи

$$Q = k \cdot F \cdot \Delta t$$
, BT

следует, что при заданных размерах стенки и температурах жидкостей величиной, определяющей теплопередачу, является коэффициент теплопередачи k. Поскольку теплопередача явление

сложное, то правильное решение можно найти только на основе анализа частных составляющих, характеризующих процесс.

Для плоской стенки

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{S}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Для металлических стенок $S \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, то можем принять

 $S/\lambda = 0$. Коэффициент теплопередачи

$$k' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}},$$

если $\alpha_2 \rightarrow \infty$, то $\alpha_1/\alpha_2 \rightarrow 0$, $k' \rightarrow \alpha_1$, если $\alpha_1 \rightarrow \infty$, то $\alpha_2/\alpha_1 \rightarrow 0$, $k' \rightarrow \alpha_2$.

Из уравнения следует, что коэффициент теплопередачи не может быть больше самого малого значения α .

Проследим это на примерах

a)
$$\alpha_1 = 40$$
, $\alpha_2 = 5000 \text{ BT/(M}^2 \cdot \text{K})$, $k'_1 = 39,7 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}$, $\alpha_1 = 40$, $\alpha_2 = 10000 \text{ BT/(M}^2 \cdot \text{K})$, $k'_2 = 39,8 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}$.
$$k'_1 = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{5000}} = \frac{1}{0,025 + 0,0002} = \frac{1}{0,0252},$$
$$k'_2 = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{10000}} = \frac{1}{0,025 + 0,0001} = \frac{1}{0,0251}.$$

δ)
$$\alpha_1$$
=80, α_2 =5000 BT/(M²·K), $k_1' = 78.8 \quad \frac{Bm}{M^2 \cdot K}$, α_1 =200, α_2 =5000 BT/(M²·K), $k_2' = 192 \quad \frac{Bm}{M^2 \cdot K}$.

$$k_1' = \frac{1}{\frac{1}{80} + \frac{1}{5000}} = \frac{1}{0,0125 + 0,0002} = \frac{1}{0,0127},$$
 $k_2' = \frac{1}{\frac{1}{200} + \frac{1}{5000}} = \frac{1}{0,005 + 0,0002} = \frac{1}{0,0052}.$
отренных примеров видно, что при с

Из рассмотренных примеров видно, что при $\alpha_1 << \alpha_2$ увеличение большего из коэффициентов теплоотдачи (α_2) практически не дает увеличение коэффициента теплопередачи k. Увеличение меньшего из коэффициентов теплоотдачи (α_1) в 2 и 5 раз дает увеличение коэффициента теплопередачи k' почти во столько же раз.

Следовательно при $\alpha_1 << \alpha_2$ для увеличения коэффициента теплопередачи k следует увеличивать α_1 , т.е. уменьшать большее из термических сопротивлений $1/\alpha_1$. Если $\alpha_1 \approx \alpha_2$, увеличение коэффициента теплопередачи возможно за счет увеличения любого из коэффициентов теплоотдачи α .

Для цилиндрической стенки величина термических сопротивлений на газовой и воздушной стороне

$$\frac{1}{\alpha_1 d_1}$$
 и $\frac{1}{\alpha_2 d_2}$.

Для сферы

$$\frac{1}{\alpha_1 d_1^2}$$
 и $\frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$.

Величина термических сопротивлений определяется не только коэффициентом теплоотдачи, но и размерами поверхностей.

Отсюда следует, что если коэффициент теплоотдачи α мал, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить путем увеличения самой поверхности. Такой же результат можно получить и для плоской стенки, если одну из поверхностей увеличить путем оребрения.

Последнее обстоятельство и положено в основу интенсификации теплопередачи за счет оребрения. При этом тепловые сопротивления станут пропорциональными величинами.

$$\frac{1}{\alpha_1 F_1}$$
 и $\frac{1}{\alpha_2 F_2}$

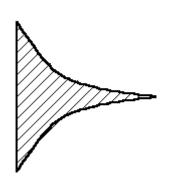


Рисунок 6.6 – Схема профиля охлаждающего ребра

Съем тепла происходит пропорционально поверхности. Когда желательно увеличить коэффициент теплоотдачи на той стороне, где он меньше, стараются увеличить поверхность, отдающую тепло путем установки ребер (рисунок 6.6). Иногда применяют двухстороннее оребрение. Расположение чтобы оно соответствовало

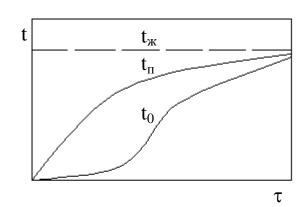
ребер должно быть таким, естественному перемещению тепловой среды: на батареи кольца ставят вертикально, нагреваемый воздух легко проходит между ребрами; в мотоцикле ребра располагают горизонтально, чтобы легко омывались встречным потоком. При конструировании систем охлаждения для целого ряда машин в особенности для летательных аппаратов, приобретает особую важность решение задачи максимального теплообмена при минимальной массе теплообменника. Возникает вопрос, какова оптимальная форма сечения ребра, имеющего наименьшую массу при заданной величине теплового потока. Ребро наименьшей массы будет, если выполнить его двумя окружностями. Такое ребро и ребро треугольного сечения по массе отличаются очень мало. По изготовить причинам проще технологическим треугольного профиля, поэтому на практике они используются чаще, чем ребра образованные дугой окружности.

7 НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ

В этом разделе рассмотрим процесс переноса тепла теплопроводностью, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени. Такие процессы теплопроводности, когда температура в теле изменяется не только в пространстве, но и во времени, называются нестационарными.

Нестационарность тепловых процессов обуславливается изменением энтальпии тела и всегда связана с явлениями его прогрева или охлаждения. В качестве примера рассмотрим такой случай. Тело внесено в среду с более высокой температурой; сразу же между средой и телом возникает процесс теплообмена и тело начинает прогреваться.

Сначала нагреваются поверхностные слои, но постепенно процесс прогрева распространяется и вглубь тела (рисунок 7.1).



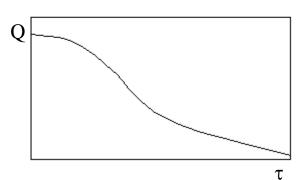


Рисунок 7.1 – Схема прогрева тела

По истечении некоторого времени (теоретически бесконечно большого) температура во всех частях тела выравнивается и становится равной температуре окружающей среды, то есть наступает тепловое равновесие.

При нестационарном режиме интенсивность подвода тепла также непостоянна во времени. По мере прогрева тела интенсивность передачи тепла постепенно уменьшается и в пределе становится равной нулю. Площадь, заключенная между осями координат и кривой, определяет собой полное количество теп-

ла, переданное за время т. Это тепло аккумулируется телом и идет на повышение его энтальпии.

Аналогичным образом протекает процесс при охлаждении тела; при этом его энтальпия уменьшается, а выделенное тепло передается в окружающую среду.

При нестационарном тепловом состоянии как правило протекают процессы, именующиеся процессами нагрева или охлаждения. Встречаются три типа задач:

- задачи, связанные с нагревом или охлаждением тел. Они встречаются очень часто, во всех промышленных печах происходит нагрев изделий (нагрев теста в хлебопекарне, слитков в колодцах, заготовок в печи); охлаждение, чтобы произвести нормализацию или закалку;
- задачи, связанные с процессами, совершающимися периодически: нагрев охлаждение, нагрев охлаждение. К такому типу задач относятся задачи расчета воздухонагревателей; продукты горения нагревают воздухонагреватель (насадку), пропускают воздух охлаждают; земля летом нагревается, зимой охлаждается;
- задачи, в которых совершаются процессы переноса тепла в случае внутренних источников тепла или стоков. Это процессы, связанные с тем, что внутри тела происходит либо выделение тепла, либо поглощение тепла (кристаллизация и др.)

Таким образом, нестационарный тепловой процесс всегда связан с изменением энтальпии. Так как скорость изменения энтальпии прямо пропорциональна способности проводить тепло (т. е. коэффициента теплопроводности λ) и обратно пропорциональна его аккумулирующей способности (т. е. объемной теплоемкости $c\rho$), то в целом скорость теплового процесса при нестационарном режиме определяется коэффициентом температуропроводности $a=\lambda/c\rho$, который имеет такое же теплопроводности значение, коэффициент И при стационарном режиме распределения тепла.

Описанный выше характер изменения температуры и количества переданного тепла справедливы лишь для твердых тел. При нагреве жидких и газообразных тел в общем случае неизбежно возникает конвекция, которая способствует выравниванию температуры.

Решить задачу нестационарной теплопроводности — это значит найти зависимости изменения температуры и количества переданного тепла во времени для любой точки тела.

Любой процесс нагревания или охлаждения тела можно условно разделить на три режима. Первый из них охватывает начало процесса, когда характерной особенностью является распространение температурных возмущений в пространстве и захват все новых и новых слоев тела. Скорость изменения температуры в отдельных точках при этом различна, и поле температуры сильно зависит от начального состояния, которое, вообще говоря, может быть различным. Поэтому первый режим характеризует начальную стадию развития процесса, и называют его неупорядоченным или инерционным режимом. С течением времени влияние начальных неравномерностей сглаживается и относительная скорость изменения температуры во всех точках тела становится постоянной. Это – режим упорядоченного процесса. По прошествии длительного времени - аналитически по истечении бесконечно большого времени – наступает третий, характерной особенностью стационарный режим, является постоянство распределения температур во времени.

Второй режим называется еще регулярным режимом. Г. М. Кондратьев создал теорию регулярного режима и предложил ряд способов использования этой теории для решения практических задач.

Необходимость расчета теплообмена при нестационарном режиме определяется его значимостью в рабочем процессе рассчитываемого агрегата. Так, например, в работе паровых котлов и большинства агрегатов электростанций нестационарный режим возникает лишь при пуске в работу, выключении и изменении режима работы. В работе же нагревательных печей нестационарный режим является основным; при расчете приходится определять время, необходимое для нагрева металла до заданной температуры, или температуру, до которой металл нагреется в течение определенного промежутка времени.

7.1 Аналитическое описание процесса

Дифференциальное уравнение теплопроводности для твердых тел имеет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \tag{7.1}$$

Чтобы получить конкретное решение, необходимо присоединить условия однозначности:

- должны быть заданы физические параметры, характеризующие физические свойства тела;
- геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в котором протекает процесс. Обычно рассматриваются 3 простые формы: плита, цилиндр и шар.
- начальные условия, характеризующие распределение температур в изучаемом теле в начальный момент времени

$$t_{\tau=0} = t_0 = f(x, y, z) \tag{7.2}$$

если задача одномерная $t_0 = f(x)$;

– граничные условия: граничные условия могут быть I, II, III, IV рода.

Дифференциальное уравнение теплопроводности (7.1) совместно с условиями однозначности дает формулировку рассматриваемой задачи. Решение ее заключается в отыскании функции

$$t = f(x, y, z, \tau, \alpha, \lambda, a, t_0, t_\infty, l_0, l_1, \dots, l_n),$$

которая удовлетворила бы уравнению (10.1) и условиям однозначности

Рассмотрим решение задачи об охлаждении плоской однородной стенки.

7.2 Решение задачи об охлаждении пластины при граничных условиях III рода

7.2.1 Математическое описание процесса

Имеется пластина толщиной 2δ (рисунок 7.2). Когда задача симметрична, тогда целесообразно начало координат располагать на оси.

При граничных условиях III рода, задаемся распределением температуры среды $t_{\rm w}$, которая окружает это изделие.

В начальный момент (τ =0) температура в пластине распределена равномерно и равна t= t_0 =const. Охлаждение происходит в среде с постоянной температурой $t_{\rm m}$ =const. На обеих поверхностях отвод тепла осуществляется при одинаковом коэффициенте теплоотдачи α =const.

На практике добиться таких случаев очень тяжело. Часто аналитическое решение состоит в том, что мы вносим ряд упрощающих допущений. Если их не вносить, то решение будет очень сложным.

Считаем, что нет градиента температур по осям у и z.

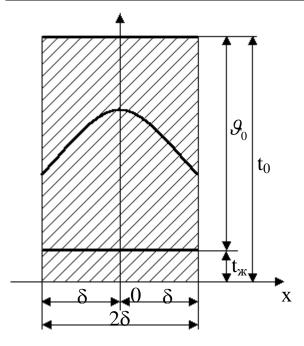


Рисунок 7.2 – Распределение температуры по толщине пластины

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$

Тогда уравнение упростится и задача превратится в одномерную задачу теплопроводности.

Температуры внутри тела будут меняться от начальной t_0 до температуры жидкости $t_{\mathfrak{R}}$. Поэтому отсчет температуры пластины для любого времени будем вести от температуры окружающей среды, то есть $t-t_{\mathfrak{R}}=\mathfrak{G}$. Это будет избыточная температура. Начальная температура

$$\mathcal{G}_0 = t_0 - t_{\mathcal{H}}. \tag{7.3}$$

Наличие новой переменной приводит к тому, что дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2}.$$
 (7.4)

7.2.2 Постановка задачи

Имеем дифференциальное уравнение (7.4), которое необходимо решать при определенных краевых условиях:

— начальные условия для момента времени τ =0

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = t_0 - t_{\text{AC}}; \tag{7.5}$$

- граничные условия III рода, в этом случае задается источник тепла при нагреве или сток тепла при охлаждении.

Задачи и нагрева, и охлаждения являются одной и той же задачей нестационарной теплопроводности, различие состоит в том, что при нагреве тепло передается от среды к телу, при охлаждении от тела к среде.

Начальные условия определяются уравнением (7.5). При заданных условиях охлаждения задача симметричная, поэтому рассматривается только правая часть, а левая является зеркальным отражением. При этом граничные условия на оси и поверхности пластины запишутся:

– на оси пластины при
$$x=0$$
; $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0$; (7.6)

- на поверхности пластины при $x=\delta$

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q = \alpha (t_{neqb} - t_{nog}).$$

Уравнение Фурье дает значение теплового потока во внутренней задаче, уравнение Ньютона дает величину теплового потока конвекцией и излучением снаружи тела; α – представляет суммарный коэффициент теплоотдачи.

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right|_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \mathcal{G} \bigg|_{x=\delta}. \tag{7.6}$$

Дифференциальное уравнение (7.4) совместно с начальными (7.5) и граничными условиями (7.6) однозначно формулируют поставленную задачу. Решение дифференциального уравнения (7.4) с учетом начальных и граничных условий и дает искомую зависимость распределения температуры в плоской пластине.

7.2.3 Решение дифференциального уравнения

Решение дифференциального уравнения будем производить методом разделения переменных. В связи с этим решение ищем в виде произведения двух функций, из которых одна является функцией только τ , а другая только x

$$\mathcal{G} = f(\tau, x) = \varphi(\tau) \psi(x). \tag{7.7}$$

После подстановки в дифференциальное уравнение получим

$$\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau} \psi(x) = a \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \varphi(\tau)$$
$$\varphi'(\tau) \psi(x) = a \psi''(x) \varphi(\tau).$$

ИЛИ

В этом уравнении легко разделяются переменные и его можно записать следующим образом

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$
 (7.8)

В этом уравнении левая часть есть функция только τ , а правая только x.

Так как равенство (7.7) должно иметь место при любых значениях x и τ , то обе его части должны быть равны некоторой постоянной величине. Обозначив её через κ^2 , получим

$$\frac{1}{a}\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\kappa^2,$$

откуда

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} + a\kappa^2 = 0, \tag{7.9}$$

$$\psi''(x) + \kappa^2 \psi(x) = 0. \tag{7.10}$$

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые легко интегрируются.

Уравнению (7.9) удовлетворяет функция

$$\varphi(\tau) = C_1 e^{-a\kappa^2\tau}.$$

Уравнению (7.10) удовлетворяет функция

$$\psi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx).$$

Если подставить эти выражения в уравнение (7.7), получим

$$\mathcal{G}(x) = (C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx))C_1 e^{-ak^2\tau}.$$
 (7.11)

Это решение в общем виде, оно не удовлетворяет и не согласовано с начальными и граничными условиями.

7.2.4 Подчинение решения начальным и граничным условиям

Полученное уравнение (7.11) содержит постоянные C_1 , C_2 , C_3 , κ . В общем виде оно удовлетворяет уравнению теплопроводности, но конкретно решать по этому уравнению невозможно, потому что неизвестны начальные и граничные условия. Подчиним уравнение (7.11) граничным условиям

при
$$x = 0$$
 $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\right)_{x=0} = C_1 e^{-ak^2\tau} \left(C_2 \cos(kx) + C_3 \sin(kx)\right) \kappa\Big|_{x=0} = 0;$$

 $C_1 e^{-ak^2\tau}$ не может быть равно нулю

$$C_2cos(kx)=C_3sin(kx); C_2cos(0)=C_3sin(0),$$

откуда $C_2 = 0$.

Константа C_2 определяется из простых соображений. Так как рассматриваем лишь симметричные задачи (то есть задачи с симметричными граничными условиями), распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени должно быть симметричным. Это значит, что искомая функция

температуры $t(x, \tau)$ должна быть четной функцией координаты x. Однако входящая в решение функция sin(kx) является нечетной, следовательно C_2 =0 для любой симметричной задачи.

$$\sin(-x) = -\sin(x); \quad \cos(x) = \cos(-x).$$

Это значит, что частное решение $\psi(x) = C_2 \sin(kx)$ должно быть отброшено, как неудовлетворяющее заданным граничным условиям.

Если учесть, что C_2 =0 и обозначить C_1C_3 =A, то получим $\mathcal{G} = A\cos(kx)e^{-ak^2\tau}. \tag{7.12}$

Там, где $x = \delta$ было записано граничное условие

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right|_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \mathcal{G} \right|_{x=\delta}.$$

Продифференцировав уравнение (10.12), получим

$$-Ak\sin(kx)e^{-ak^{2}\tau} = -\frac{\alpha}{\lambda}A\cos(kx)e^{-ak^{2}\tau}\Big|_{x=\delta}; \quad (7.13)$$

$$k\sin(k\delta) = \frac{\alpha}{\lambda}\cos(k\delta);$$

$$ctg(k\delta) = \frac{k}{\alpha}.$$

Умножив правую часть (числитель и знаменатель) на δ , получим

$$ctg(k\delta) = \frac{k \cdot \delta}{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \delta}.$$

Обозначим $\kappa \delta = \mu$.

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}; \quad Bi = \frac{\frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}}.$$

Число Bi показывает соотношение термических сопротивлений теплопроводности материала и теплообмена с внешней средой.

Физический смысл критерия Био можно истолковать следующим образом: коэффициент теплоотдачи α при известной разности температур определяет отвод тепла с поверхности

охлаждения тела, а подвод тепла к этой же поверхности изнутри массы тела определяется теплопроводностью λ/δ .

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda / \delta}$$

Следовательно, отношение этих характерных величин $\frac{\alpha}{\lambda / \delta}$

представляет относительную интенсивность теплоотвода поверхности тела по сравнению с интенсивностью теплопритока изнутри его массы к поверхности. Чем меньше критерий Био, тем меньше будет отвод тепла с поверхности охлаждаемого тела по сравнению с притоком тепла изнутри. В этой задаче делалось допущение, что в избранном сечении температура постоянна. Это большом допущение ИЛИ при коэффициенте возможно теплопроводности малой теплоотдаче ИЛИ при поверхности, то есть когда стержень изготовлен тонким и из теплопроводного материала.

Числа Nu и Bi имеют одинаковую форму. Nu относится к внешней задаче, а Bi к внутренней задаче.

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda_{\infty}}$$
 — он является характеристикой во внешней задаче.

 λ_{nc} – коэффициент теплопроводности жидкости.

$$ctg(\mu) = \frac{\mu}{Bi}.$$
 (7.14)

7.2.5 Анализ трансцендентного уравнения

Уравнение (7.14) называется трансцендентным уравнением. Неизвестная величина µ входит справа как неизвестная величина, а слева она входит в ctg.

Из анализа этого тригонометрического уравнения следует, что при каждом значении Bi существует бесконечное множество решений. Наиболее просто уравнение (7.14) можно решить графическим способом (рисунок 7.3). Обозначим

$$y_1 = ctg(\mu), \quad y_2 = \frac{\mu}{Bi}.$$

Пересечение котангенсоиды y_1 с прямой y_2 дает значение корней. Получим бесконечное множество решений

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n$$
.

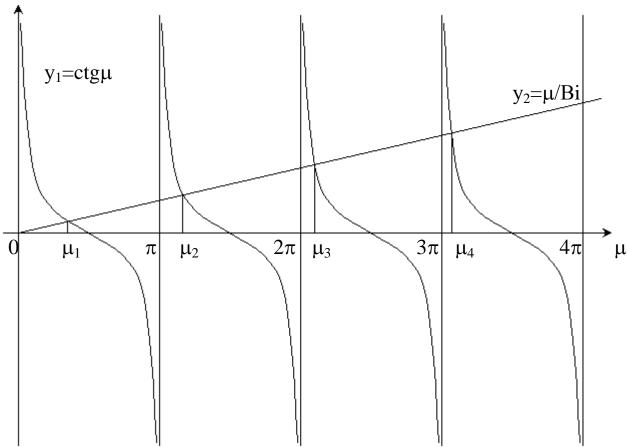


Рисунок 7.3 – Решение трансцендентного уравнения

Причем каждая последующая величина больше предыдущей. Важно отметить, что каждому значению критерия Bi отвечает своя совокупность корней уравнения.

Число Ві может принимать предельные значения

а) $Bi \rightarrow \infty$ $y_2 = 0$, прямая преобразуется в ось абсцисс и корни уравнения будут равны

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2}; \mu_2 = \frac{3}{2}\pi; \mu_3 = \frac{5}{2}\pi; \dots, \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

б) $Bi \rightarrow 0$ прямая $y_2 = \frac{\mu}{Bi}$ совпадает с осью ординат и тангенс угла наклона прямой стремится к бесконечности, при этом корни уравнения равны

$$\mu_1 = 0; \mu_2 = \pi; \mu_3 = 2\pi; ..., \mu_n = (n-1)\pi.$$

Для других конечных значений величины Bi числа $\mu_{\rm n}$ имеют промежуточные значения (таблица 7.1)

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956
11,43005	1,4451	4,3488	7,2865	10,2639
1,0000	0,8603	3,4256	6,4373	9,5294
0,0000	0,000	3,1416	6,2832	9,4248

Таблица 7.1 - Значения μ для пластины

В конечном итоге решение (7.12) согласовали с граничными условиями и получили множество корней.

7.2.6 Частное решение задачи

Нашли, что в конечном итоге распределение температуры \mathcal{G} будет характеризоваться уравнением, в котором неизвестная величина $\kappa = \mu/\delta$, где μ — принимает целый ряд значений. Если подставить эти значения, то получим

$$\mathcal{G}_{1} = A_{1} \cos\left(\mu_{1} \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_{1}^{2} \frac{a\tau}{\delta^{2}}}$$

$$\mathcal{G}_{2} = A_{2} \cos\left(\mu_{2} \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_{2}^{2} \frac{a\tau}{\delta^{2}}}$$

$$\mathcal{G}_{n} = A_{n} \cos\left(\mu_{n} \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_{n}^{2} \frac{a\tau}{\delta^{2}}}$$

$$(7.15)$$

Каждому найденному значению корня μ будет соответствовать своё частное распределение температур.

Полученные частные решения (7.15) будут удовлетворять дифференциальному уравнению при любых значениях $A_1, A_2, ..., A_n$, но ни одно из этих решений не будет соответствовать действительному распределению температуры в начальный момент времени. Однако путем наложения бесконечного числа таких распределений при соответствующем выборе величин A_n можно воспроизвести любую действительную температурную кривую в начальный момент времени

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}},\tag{7.16}$$

где

$$A_{n} = \upsilon_{0} \frac{2 \sin(\mu_{n})}{\mu_{n} + \sin(\mu_{n}) \cdot \cos(\mu_{n})}$$
 (7.17)

Из уравнения (7.17) следует, что $A_{\rm n}$ является функцией только корня трансцендентного уравнения, который является функцией Bi, значит $A_n = f(Bi)$.

7.2.7 Окончательное решение

Запишем выражение температурного поля:

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos \left(\mu_n \frac{x}{\delta} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}.$$
 (7.18)

Это выражение дает возможность получить температуру в любой точке по сечению тела для любого момента времени по заданным условиям. Уравнению температурного поля целесообразно придать безразмерную форму

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_0} = \Theta = \frac{t - t_{\mathcal{H}}}{t_0 - t_{\mathcal{H}}} = \frac{t_{neq_b} - t}{t_{neq_b} - t_0} = 0...1,$$

где Θ – температурная функция, представляющая безразмерную температуру, знаменатель представляет разность между самой высокой температурой $t_{\text{печь}}$ и самой низкой t_0 (при нагреве);

 Θ будет представлять доли от единицы, где за единицу принят максимальный перепад;

x — текущая координата

$$\frac{x}{\delta} = X = 0...1$$
 – безразмерная координата:

 $\frac{x}{\delta} = X = 0...1$ – безразмерная координата: $\frac{x}{\delta} = 0$ – точка находится на оси изделия; $\frac{x}{\delta} = 1$ – точка находится на поверхности;

 $Fo = \frac{a\tau}{S^2}$ – число Фурье или безразмерное время.

Тогда уравнение (7.18) окончательно запишем

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 F_0}.$$
 (7.19)

Это выражение можно записать в неявном виде

$$\Theta = f(Bi, Fo, X). \tag{7.20}$$

Выражение (7.20) связывает безразмерные величины Θ , Bi, Fo, X. На графике (рисунок 7.4) обычным образом представить такую зависимость невозможно. Как правило строят два крайних графика: для X=0 и X=1.

7.3 Определение количества тепла, отданного пластиной в процессе охлаждения

Кроме решения задачи о распределении температуры необходимо и определение количества тепла. Количество тепла, которое отдает или воспринимает пластина за какой-то период времени, равняется изменению внутренней энергии тела.

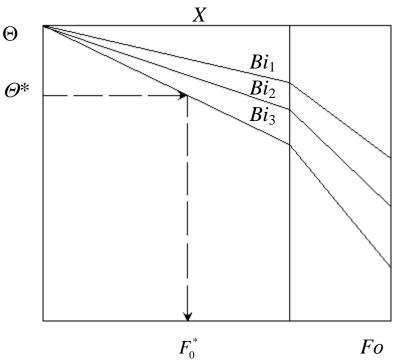


Рисунок 7.4 — Схема представления безразмерных величин Θ , Bi, Fo для определенного значения X

Общее количество тепла, Дж, которое пластина отдает за время τ =0 до τ = ∞

$$Q_n = i \cdot m = 2\delta \cdot f \cdot \rho \cdot c \cdot (t_0 - t_{\infty}),$$

где i – энтальпия, Дж/кг;

m –масса пластины, кг;

f – поверхность пластины, м²;

 ρ – плотность материала пластины, кг/м³;

c – теплоемкость, Дж/(кг·К).

Если необходимо определить количество тепла, отданное за время τ =0 до τ_1

$$Q = Q_{n} - Q_{l} = 2\delta \cdot f \cdot \rho \cdot c \cdot (t_{0} - t_{\infty}) - 2\delta \cdot f \cdot \rho \cdot c \cdot (\overline{t_{l}} - t_{\infty}) = 2\delta \cdot f \cdot \rho \cdot c \cdot (t_{0} - t_{\infty}) \left(1 - \frac{(\overline{t_{l}} - t_{\infty})}{(t_{0} - t_{\infty})}\right).$$

Обозначим $\overline{\Theta_1} = \frac{(\overline{t_1} - t_{\infty})}{(t_0 - t_{\infty})}$ среднюю безразмерную температуру

по толщине пластины в момент времени τ_1 .

Тогда

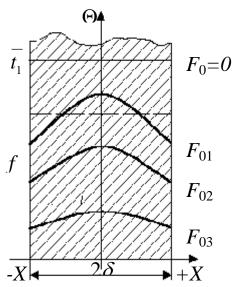


Рисунок 7.5 – Изменение температуры по сечению пластины для различных моментов времени

$$Q = Q_n \left(1 - \overline{\Theta}_1 \right) \qquad (7.21)$$

Чтобы найти количество отданного тепла по уравнению (7.21), необходимо найти среднюю безразмерную температуру. Средняя безразмерная температура для слоя пластины от оси симметрии до плоскости X найдется как

$$\overline{\Theta} = \frac{1}{X} \int_{0}^{X} \Theta dX \qquad (7.22)$$

в соответствии с теоремой о среднем. Если в это выражение подставить под знак интеграла значение Θ из уравнения (7.19) и проинтегрировать в пределах от нуля до единицы, то получим

$$\overline{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2 \mu_n}{\mu_n^2 + \mu_n \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo).$$
 (7.23)

Если подставить нужные величины, то тогда сможем получить количество тепла, полученное или отданное телом.

7.4 Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров

Рассмотрим охлаждение параллелепипеда в среде с постоянной температурой $t_{\rm cp}$ и с постоянным коэффициентом теплоотдачи α на всех гранях. В начальный момент времени τ =0 все точки параллелепипеда имеют одинаковую температуру t_0 . Размеры параллелепипеда $2S \cdot 2L \cdot 2H$ (рисунок 7.6). Поместим начало координат в центре параллелепипеда. Параллелепипеды, цилиндры конечных размеров и прямоугольные стержни можно рассматривать как тела, образованные пересечением взаимно перпендикулярных соответственно трех пластин, цилиндра и пластины, и двух пластин неограниченных размеров, но конечной толщины. Можно доказать, что решение таких задач

можно представить как произведение безразмерных температур для тел неограниченных размеров, в результате пересечения которых образовалось рассматриваемое тело

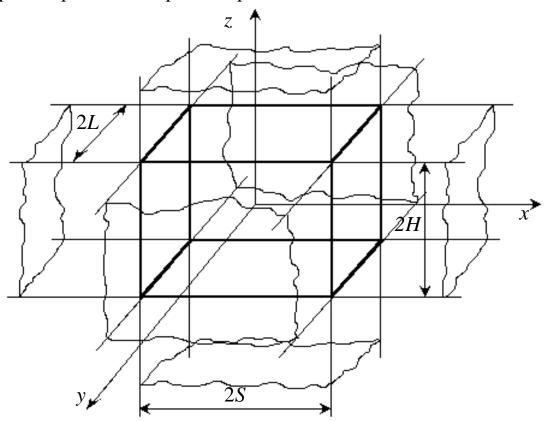


Рисунок 7.6 — Образование параллелепипеда пересечением трех безграничных пластин конечной толщины 2L, 2S, 2H

Параллелепипед образован в результате пересечения трех взаимно перпендикулярных пластин безграничных размеров, но конечной толщины. Следовательно для него и решение можно представить как произведение безразмерных температур для трех безграничных пластин

$$\Theta = \Theta_x \Theta_y \Theta_z,$$

где

$$\Theta_{x} = \frac{t(x,\tau) - t_{cp}}{t_{0} - t_{cp}};$$

$$\Theta_{y} = \frac{t(y,\tau) - t_{cp}}{t_{0} - t_{cp}};$$

$$\Theta_{z} = \frac{t(z,\tau) - t_{cp}}{t_{0} - t_{cp}}.$$

Общее решение запишется

$$\Theta = \frac{t(x,y,z,\tau) - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}} = \frac{t(x,\tau) - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}} \cdot \frac{t(y,\tau) - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}} \cdot \frac{t(z,\tau) - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}}.$$

Приведенное решение удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и граничным условиям, описывающим процесс теплопроводности в параллелепипеде.

Таким образом, решение задачи для рассматриваемого тела конечных размеров свелось к решению задачи для безграничной пластины конечной толщины. Полученное уравнение можно переписать

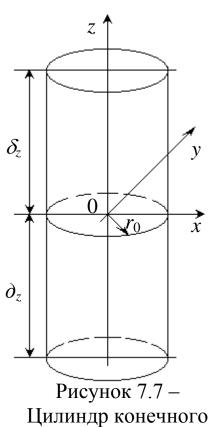
$$\Theta = F_x \left(\frac{a\tau}{S^2}, \frac{\alpha \cdot S}{\lambda}, \frac{x}{S} \right) \cdot F_y \left(\frac{a\tau}{L^2}, \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \frac{y}{L} \right) \cdot F_z \left(\frac{a\tau}{H^2}, \frac{\alpha \cdot H}{\lambda}, \frac{z}{H} \right)$$

ИЛИ

$$\Theta = F_x(Fo_x, Bi_x, X) \cdot F_y(Fo_y, Bi_y, Y) \cdot F_z(Fo_z, Bi_z, Z).$$

Рассмотренный метод известен в теории теплопроводности под названием теоремы о перемножении решений.

7.5 Охлаждение цилиндра конечной длинны



Цилиндр конечного размера

Однородный цилиндр охлаждается в среде с постоянной температурой коэффициент теплоотдачи а на основаниях цилиндра и его поверхности одинаков. В начальный момент (τ =0) все точки цилиндра имеют одинаковую температуру t_0 . Диаметр цилиндра равен $2r_0$, длина $l=2\delta_z$. Необходимо найти распределение температуры в цилиндре для любого момента времени и среднюю температуру как функцию времени для заданных условий однознач-Конечный ности. цилиндр рассматривать как результат пересечения безграничных цилиндра диаметром $2r_0$ и пластины толщиной $2\delta_z$ (рисунок 7.7).

Безразмерную температуру ДЛЯ такого тела можно записать как

$$\Theta = \Theta_z \Theta_r = \frac{t(z,\tau) - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}} \cdot \frac{t(r,\tau) - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}}$$

ИЛИ

$$\Theta = F_z \left(\frac{a\tau}{\delta_z^2}, \frac{\alpha \cdot \delta_z}{\lambda}, \frac{z}{\delta_z} \right) \cdot F_r \left(\frac{a\tau}{r_0^2}, \frac{\alpha \cdot r_0}{\lambda}, \frac{r}{r_0} \right).$$

В качестве определяющих линейных размеров берется половина высоты цилиндра $\delta_{\rm z}$, радиус цилиндра r_0 .

7.6 Определение средней температуры

Средняя температура для пластины вычисляется по формуле

$$\overline{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2 \mu_n}{\mu_n^2 + \mu_n \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo).$$

Средняя температура для цилиндра

$$\overline{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4Bi^2}{\mu_n^2 (\mu_n^2 + Bi^2)} \exp(-\mu_n^2 Fo).$$

При расчете средней температуры $\overline{\Theta}$ в случае $Fo \ge 0.3$ (для пластины) и $Fo \ge 0.25$ (для цилиндра) можно ограничиться первыми членами ряда.

Для пластины

$$\overline{\Theta} = \frac{2\sin^2 \mu_1}{\mu^2_1 + \mu_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo).$$

Множитель $\frac{2\sin^2\mu_I}{\mu^2_I + \mu_I\sin\mu_I\cos\mu_I}$ зависит только от критерия

Bi и может быть представлен как некоторая функция M(Bi)

$$\overline{\Theta} = M(Bi) exp(-\mu_1^2 Fo)$$

Функция M(Bi) может быть заранее рассчитана и представлена в таблице 7.2.

Таблица 7.2 - Коэффициенты для расчета нагрева или охлаждения пластины толщиной 2δ

Критерий					Критерий				
Bi,					Bi,				
-	μ^2	P	M	N	•	μ^2	P	M	N
$\frac{\alpha}{\lambda}\delta$					$\frac{\alpha}{\lambda}\delta$				
	0.0000	1 000	1 000	1 000		1 222	0.505	0.060	1.106
0,00	0,0000	1,000	1,000	1,000	2,2	1,222	0,535	0,960	1,186
0,01	0,0100	0,997	1,000	1,002	2,4	1,277	0,510	0,956	1,193
0,02	0,0199	0,993	1,000	1,003	2,6	1,332	0,488	0,952	1,200
0,04	0,0397	0,987	1,000	1,006	2,8	1,380	0,468	0,948	1,205
0,06	0,0584	0,981	1,000	1,010	3,0	1,420	0,448	0,944	1,210
0,08	0,0778	0,974	1,000	1,013	3,5	1,52	0,406	0,935	1,221
0,10	0,0968	0,967	1,000	1,016	4,0	1,59	0,370	0,926	1,229
0,12	0,1154	0,960	1,000	1,020	4,5	1,66	0,338	0,919	1,235
0,14	0,1337	0,954	1,000	1,023	5,0	1,73	0,314	0,912	1,240
0,16	0,1518	0,948	1,000	1,026	5,5	1,78	0,293	0,906	1,244
0,18	0,1697	0,942	1,000	1,029	6,0	1,82	0,273	0,901	1,248
0,20	0,1874	0,936	1,000	1,031	7,0	1,90	0,241	0,892	1,254
0,22	0,2048	0,930	1,000	1,034	8,0	1,95	0,216	0,885	1,257
0,24	0,2220	0,924	0,999	1,037	9,0	2,00	0,196	0,879	1,260
0,26	0,2390	0,918	0,999	1,040	10	2,04	0,180	0,874	1,262
0,28	0,2558	0,912	0,999	1,042	12	2,08	0,152	0,866	1,265
0,30	0,2723	0,906	0,999	1,045	14	2,12	0,132	0,859	1,267
0,35	0,3125	0,891	0,998	1,052	16	2,16	0,116	0,855	1,268
0,40	0,3516	0,877	0,998	1,058	18	2,20	0,104	0,851	1,269
0,45	0,3894	0,863	0,997	1,064	20	2,24	0,094	0,847	1,270
0,50	0,4264	0,849	0,996	1,070	25	2,27	0,076	0,841	1,271
0,55	0,4624	0,836	0,995	1,076	30	2,30	0,065	0,836	1,271
0,60	0,497	0,823	0,994	1,081	35	2,33	0,0560	0,832	1,272
0,70	0,564	0,798	0,992	1,092	40	2,35	0,0500	0,829	1,272
0,80	0,626	0,774	0,990	1,102	50	2,37	0,0400	0,826	1,272
0,90	0,684	0,751	0,988	1,111	60	2,39	0,0333	0,824	1,273
1,00	0,740	0,729	0,986	1,119	70	2,40	0,0286	0,822	1,273
1,20	0.841	0,689	0,981	1,134	80	2,41	0,0250	0,820	1,273
1,40	0.931	0,653	0,977	1,148	90	2,41	0,0222	0,819	1,273
1,60	1,016	0,619	0,972	1,159	100	2,42	0,0200	0,818	1,273
1,80	1,090	0,587	0,968	1,169	œ	2,467	0,0000	0,810	1,273
2	1,162	0,559	0,964	1,179		,		,	ĺ

Для цилиндра

$$\overline{\Theta} = \frac{4Bi^2}{\mu^2 (\mu^2 + Bi^2)} exp(-\mu_I^2 F_0).$$

Функцию $\frac{4Bi^2}{\mu^2_1(\mu^2_1+Bi^2)}=M_0(Bi)$ можно заранее рассчитать для соответствующих значений Bi. Её значения приведены в таблице 7.3.

Таблица 7.3 - Коэффициенты для расчета нагрева или охлаждения длинного цилиндра радиуса *R*

	1	0.	Алажд	СПИИ	ЛИННОГО	цилин	тдра ре	идитусс	ı N
Крите-					Крите-				
рий					рий				
Bi,	μ^2	P_0	M_0	N_0	Bi,	μ^2	P_0	M_0	N_0
$\frac{\alpha}{\lambda}R$					$\frac{\alpha}{\lambda}R$				
0,00	0,0000	1,000	1,000	1,000	2,2	2,70	0,584	0,949	1,357
0,00	0,0000	0,998	1,000	1,000	2,4	2,84	0,558	0,943	1,375
0,02	0,0398	0,995	1,000	1,002	2,6	2,97	0,534	0,937	1,392
0,04	0,0390	0,990	1,000	1,010	2,8	3,09	0,513	0,931	1,406
0,06	0,0732	0,985	1,000	1,014	3,0	3,20	0,492	0,925	1,420
0,08	0,1169	0,980	1,000	1,014	3,5	3,44	0,446	0,910	1,449
0,10	1,1951	0,975	1,000	1,024	4,0	3,64	0,407	0,896	1,472
0,10	0,2329	0,970	1,000	1,029	4,5	3,81	0,374	0,884	1,489
0,12	0,2323	0,965	1,000	1,034	5,0	3,96	0,345	0,873	1,504
0,14	0,3075	0,960	1,000	1,039	5,5	4,09	0,349	0,863	1,516
0,18	0,3443	0,956	1,000	1,044	6,0	4,20	0,320	0,854	1,527
0,20	0,3807	0,951	1,000	1,048	7,0	4,38	0,262	0,837	1,541
0,22	0,4167	0,946	0,999	1,053	8,0	4,53	0,234	0,823	1,551
0,24	0,4524	0,941	0,999	1,053	9,0	4,65	0,210	0,823	1,560
0,26	0,4877	0,937	0,999	1,062	10	4,75	0,191	0,803	1,566
0,28	0,5226	0,932	0,999	1,067	12	4,92	0,161	0,788	1,575
0,30	0,5572	0,927	0,999	1,071	14	5,03	0,137	0,776	1,581
0,35	0,642	0,915	0,998	1,082	16	5,12	0,120	0,768	1,585
0,40	0,726	0,903	0,998	1,093	18	5,18	0,106	0,761	1,588
0,45	0,806	0,891	0,997	1,103	20	5,24	0,095	0,755	1,590
0,50	0,888	0,880	0,996	1,114	25	5,34	0,076	0,744	1,595
0,55	0,962	0,869	0,995	1,124	30	5,41	0,065	0,736	1,598
0,60	1,036	0,858	0,993	1,134	35	5,46	0,0560	0,730	1,600
0,70	1,184	0,836	0,991	1,154	40	5,50	0,0500	0,725	1,602
0,80	1,322	0,815	0,989	1,172	50	5,55	0,0400	0,719	1,603
0,90	1,453	0,795	0,987	1,190	60	5,59	0,0333	0,714	1,604
1,00	1,580	0,774	0,985	1,208	70	5,62	0,0286	0,710	1,604
1,20	1,81	0,738	0,979	1,239	80	5,64	0,0250	0,707	1,605
1,40	2,03	0,704	0,973	1,268	90	5,66	0,0222	0,705	1,605
1,60	2,22	0,671	0,967	1,295	100	5,68	0,0200	0,704	1,606
1,80	2,39	0,639	0,961	1,319	œ	5,787	0,0000	0,691	1,606
2	2,55	0,610	0,955	1,340					

Расчетные формулы для пластины толщиной 2δ

⁻ температура поверхности

$$t_n = t_{neq} - (t_{neq} - \overline{t_n}) P \exp\left(-\mu^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right);$$

- температура оси

$$t_n = t_{neu} - (t_{neu} - \overline{t_n}) N \exp\left(-\mu^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right);$$

- средняя температура по сечению

$$\bar{t} = t_{neu} - (t_{neu} - \bar{t_n}) M \exp\left(-\mu^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right).$$

Для цилиндра диаметром 2R вместо δ подставляется R, вместо P, N, $M - P_0$, N_0 , M_0 .

7.7 Численный метод решения дифференциального уравнения теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерного температурного поля запишем в виде

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right).$$

Для простоты выкладок примем, что m=0, тогда

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial r^2}$$

При численном методе толщина тела разделяется на п плоскостей (рисунок 7.8) и производные заменяются конечными разностями.

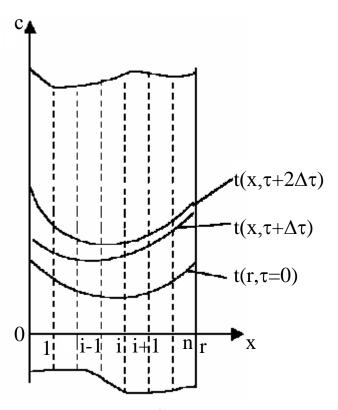


Рисунок 7.8 – Схема разбиения тела плоскостями

Производная по координате определяется по значениям температуры в различных точках в один и тот же момент времени

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{t_{i+1}^{\tau} - t_{i}^{\tau}}{\Delta r}; \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{t_{i}^{\tau} - t_{i-1}^{\tau}}{\Delta r};$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{t_{i+1}^{\tau + \Delta r} - t_{i}^{\tau + \Delta r}}{\Delta r}.$$

Производная по времени определяется по значениям температуры тела в одной и той же точке, но в разные моменты времени

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{t_i^{\tau + \Delta \tau} - t_i^{\tau}}{\Delta \tau}; \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{t_{i-1}^{\tau + \Delta \tau} - t_{i-1}^{\tau}}{\Delta \tau}.$$

Применение численных методов дает возможность решать задачи с произвольными граничными условиями и произвольным распределением температуры в начальный момент времени.

Как уже отмечалось выше, численным методам присущи следующие недостатки:

- при численном методе нельзя получить решение задачи в аналитическом виде;
- требуется выполнить большой объем вычислений.

Современное состояние вычислительной техники позволяет легко реализовывать численные методы и быстро получить искомые результаты.

7.8 Конечно-разностный метод

7.8.1 Определение температуры во внутренних точках тела

Составим баланс количества тепла для і-го элементарного объема (рисунок 7.9) с поперечным сечением F. Количество тепла, подведенное в элементарный объем за время $d\tau$, равно изменению энтальпии этого объема.

К элементарному объему через плоскость на расстоянии $r_i - \Delta r_{i-1}/2$ подводится количество тепла: $Q_1 = q_{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}} \cdot F \cdot d\tau$, а через плоскость на расстоянии $r_i + \Delta r_i/2$ отводиться количества тепла : $Q_2 = q_{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}} \cdot F \cdot d\tau$.

Количество тепла, которое осталось в элементарном объеме

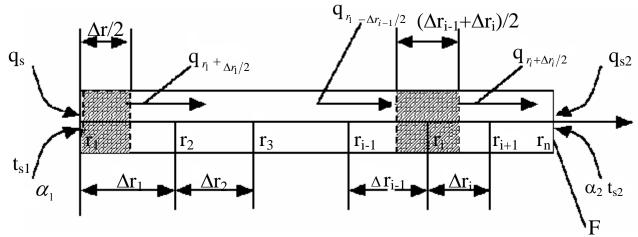


Рисунок 7.9 – К определению температуры по сечению тела

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = \left(q_{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}} - q_{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}}\right) \cdot F \cdot d\tau.$$

Это количество тепла приведет к изменению энтальпии в элементарном объеме mcdt, где $m=\rho dv$, $dt=\frac{\partial t}{\partial \tau}\cdot d\tau$.

Тогда:

$$\left(q_{r_{i}-\frac{\Delta r_{i-1}}{2}}-q_{r_{i}+\frac{\Delta r_{i}}{2}}\right)\cdot F\cdot dt=\rho c\cdot \frac{\partial t}{\partial \tau}\cdot d\tau\cdot dv,$$

где

$$egin{aligned} q_{r_i+rac{\Delta r_i}{2}} &= -\lambda rac{\partial t}{\partial r} = -\lambda rac{t_{i+1}^{\tau+\Delta au} - t_i^{\tau+\Delta au}}{\Delta r_i}. \ q_{r_i-rac{\Delta r_{i-1}}{2}} &= -\lambda rac{\partial t}{\partial r} = -\lambda rac{t_i^{\tau+\Delta au} - t_i^{\tau+\Delta au}}{\Delta r_i}; \end{aligned}$$

Тогда

$$q_{r_i-\frac{\Delta r_{i-1}}{2}}-q_{r_i+\frac{\Delta r_i}{2}}=-\lambda\frac{t_i^{\tau+\Delta\tau}-t_{i-1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r_{i-1}}-\left[-\lambda\frac{t_{i+1}^{\tau+\Delta\tau}-t_{i}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r_i}\right];$$

Производную $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ заменим на конечную разность

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{t_i^{\tau + \Delta \tau} - t_i^{\tau}}{\Delta \tau},$$

объем

$$dv = \frac{\Delta r_{i-1} + \Delta r_i}{2} \cdot F.$$

Тогда

$$\left(-\lambda \frac{t_{i}^{\tau+\Delta\tau} - t_{i-1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r_{i-1}} + \lambda \frac{t_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} - t_{i}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r_{i}}\right) \cdot F \cdot d\tau =
= \rho \cdot c \frac{t_{i}^{\tau+\Delta\tau} - t_{i}^{\tau}}{\Delta \tau} \cdot d\tau \cdot \frac{\Delta r_{i-1} + \Delta r_{i}}{2} \cdot F.$$
(7.24)

Уравнение (7.24) позволяет получить значения температуры в точках i=2,3..., n-1, т.е. во всех за исключением граничных точек при произвольном шаге по координате.

Примем равномерный шаг по координате $\Delta r_1 = \Delta r_2 = ... = \Delta r_i = \Delta r$ и, умножив уравнение (7.24) на величину $\Delta r / \lambda$, получим

$$t_{i-1}^{\tau+\Delta\tau} - \left(2 + \frac{\Delta r^2}{a\Delta\tau}\right) \cdot t_i^{\tau+\Delta\tau} + t_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} = -\frac{\Delta r^2}{a \cdot \Delta\tau} \cdot t_i^{\tau}, \qquad (7.25)$$

i=2,3,...,n-1.

или

$$A_{i}\cdot t_{i-1}^{\tau+\Delta\tau}-C_{i}^{*}\cdot t_{i}^{\tau+\Delta\tau}+B_{i}\cdot t_{i+1}^{\tau+\Delta\tau}=-F_{i}$$

где
$$A_i = 1; C^* = 2 + \Delta r^2 /\!\! (a \cdot \Delta \tau); B_i = 1; F_i = \Delta r^2 /\!\! (a \cdot \Delta \tau) \cdot t_i^\tau.$$

В том случае, если исследуя изменение температуры в цилиндре или шаре

$$A_i = 1 - \frac{m \cdot \Delta r}{2r}; \quad B_i = 1 + \frac{m \cdot \Delta r}{2r}.$$

где r- текущая координата $r = \Delta r(i-1)$, тогда

$$A_i = 1 - \frac{m}{2 \cdot (i-1)}; \quad B_i = 1 + \frac{m}{2 \cdot (i-1)}.$$

7.8.2 Определение температуры в граничных точках

Составим уравнение баланса для элементарного объема, выделенного на левой границе (рисунок 7.9). Обозначим количество тепла, которое подводиться к элементарному объему через Q_1 , а которое отводится через Q_2 .

Количество тепла которое подводится к элементарному объему

$$Q_{1} = \left[q_{s1}^{\tau+\Delta\tau} + \alpha_{1} \cdot \left(t_{s1}^{\tau+\Delta\tau} - t_{1}^{\tau+\Delta\tau}\right)\right] \cdot F \cdot d\tau,$$

где q_{s1} - плотность теплового потока, подводимого к поверхности тела, на левой границе, $B\tau/m^2$;

 t_{s1} -температура среды на левой границе , ${}^{0}C$;

 α_1 -коэффициент теплоотдачи на левой границе, $BT/(M^2 \cdot K)$.

Количество тепла, которое отводится от элементарного объема

$$Q_2 = q_{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}} \cdot F \cdot d\tau,$$

где

$$q_{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}} = q_{r_i + \frac{\Delta r}{2}} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = -\lambda \frac{t_2^{\tau + \Delta \tau} - t_1^{\tau + \Delta \tau}}{\Delta r}.$$

Количество тепла, оставшееся в элементарном объеме, приводит к изменению энтальпии

$$\Delta Q = \rho \cdot c \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot d\tau \cdot dV,$$

где ρ -плотность вещества, кг/м³; с- теплоемкость, Дж/кг · K .

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{t_1^{\tau + \Delta \tau} - t_1^{\tau}}{\Delta \tau}; \ dV = \frac{\Delta r}{2} \cdot F.$$

Тогда

$$\left[q_{s1}^{\tau+\Delta\tau} + \alpha_{1}\left(t_{s1}^{\tau+\Delta\tau} - t_{1}^{\tau+\Delta\tau}\right)\right] \cdot F \cdot d\tau - \left(-\lambda \frac{t_{2}^{\tau+\Delta\tau} - t_{1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta\tau} \cdot F \cdot d\tau\right) = \\
= c\rho \frac{t_{1}^{\tau+\Delta\tau} - t_{1}^{\tau}}{\Delta\tau} \cdot d\tau \cdot \frac{\Delta r}{2} \cdot F.$$

После преобразования получим

$$\left[q_{s_1}^{\tau+\Delta\tau}+\alpha_1\left(t_{s_1}^{\tau+\Delta\tau}-t_1^{\tau+\Delta\tau}\right)\right]+\lambda\frac{t_2^{\tau+\Delta\tau}-t_1^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta r}=c\rho\frac{t_1^{\tau+\Delta\tau}-t_1^{\tau}}{\Delta\tau}\cdot\frac{\Delta r}{2}.$$

Умножив полученное уравнение на величину $\Delta r/\lambda$, получим

$$t_{1}^{\tau + \Delta \tau} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{1} \cdot \Delta r}{\lambda} + \frac{\Delta r^{2}}{2a \cdot \Delta \tau}} t_{2}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{1} \cdot \Delta r}{\lambda} + \frac{\Delta r^{2}}{2a \cdot \Delta \tau}} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\lambda} \cdot q_{s1}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\alpha_{1} \cdot \Delta r}{\lambda} \cdot t_{s1}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\Delta r^{2}}{2a \cdot \Delta \tau} \cdot t_{1}^{\tau} \right)$$
(7.26)

Проведя аналогичные выводы получим значения температуры на другой границе

$$t_{n}^{\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{2} \cdot \Delta r}{\lambda} + \frac{\Delta r^{2}}{2a \cdot \Delta \tau}} t_{n-1}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{2} \cdot \Delta r}{\lambda} + \frac{\Delta r^{2}}{2a \cdot \Delta \tau}} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\lambda} \cdot q_{s2}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{\alpha_{2} \cdot \Delta r}{\lambda} \cdot t_{s2}^{\tau+\Delta\tau} + \frac{\Delta r^{2}}{2a \cdot \Delta \tau} \cdot t_{n}^{\tau} \right)$$
(7.27)

Обозначив

$$\chi_1 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1 \cdot \Delta r}{\lambda} + \frac{\Delta r^2}{2a \cdot \Delta \tau}}; \quad \chi_2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2 \cdot \Delta r}{\lambda} + \frac{\Delta r^2}{2a \cdot \Delta \tau}}.$$

$$v_{1} = \chi_{1} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\lambda} \cdot q_{s1}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\alpha_{1} \cdot \Delta r}{\lambda} \cdot t_{s1}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\Delta r^{2}}{2a \cdot \Delta \tau} \cdot t_{1}^{\tau} \right);$$

$$v_{2} = \chi_{2} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\lambda} \cdot q_{s2}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\alpha_{2} \cdot \Delta r}{\lambda} \cdot t_{s2}^{\tau + \Delta \tau} + \frac{\Delta r^{2}}{2a \cdot \Delta \tau} \cdot t_{n}^{\tau} \right),$$

получим

$$t_1^{\tau + \Delta \tau} = \chi_1 \cdot t_2^{\tau + \Delta \tau} + \nu_1 \tag{7.28}$$

$$t_n^{\tau + \Delta \tau} = \chi_2 \cdot t_{n-1}^{\tau + \Delta \tau} + \nu_2 \tag{7.29}$$

Если на одной и другой границах тела действуют граничные условия одного и того же рода и одинаковые по величине, тогда задача будет симметричная относительно геометрической середины тела. В случае ЭТОМ нет необходимости определять температуры по всей толщине тела. Достаточно рассчитать температуру для половины тела (рисунок 7.10). Для того, чтобы решить такую задачу нужно определить граничные условия на оси тела. При

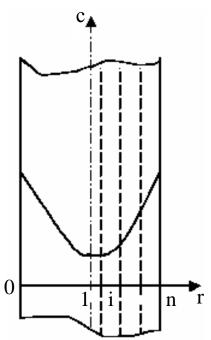


Рисунок 7.10 – Схема разделения тела плоскостями при симметричных условиях

симметричной задаче на оси тела плотность теплового потока будет равна нулю q=0, т.е. тангенс угла наклона касательной к

кривой на оси будет равен нулю
$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = 0$$
;

$$-\lambda \frac{t_2^{\tau + \Delta \tau} - t_1^{\tau + \Delta \tau}}{\Delta r} = 0$$
, откуда
$$t_1 = t_2. \tag{7.30}$$

Сравнивая между собой уравнения (7.27) и (7.29), находим, что $\chi_{_1}$ =1; $\nu_{_1}$ = 0.

7.8.3 Метод прогонки

Уравнение

$$A_i \cdot t_{i-1}^{\tau + \Delta \tau} - C_i^* \cdot t_i^{\tau + \Delta \tau} + B_i \cdot t_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} = -F_i$$
 (7.31)

называют трехточечным разностным уравнением. Для решения уравнения (8) используют метод прогонки.

Решение разностного уравнения (7.31) будем искать в таком же виде, как заданы граничные условия (7.28) и (7.29)

$$t_i^{\tau+\Delta\tau} = \alpha_{i+1} \cdot t_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} + \beta_{i+1}, \quad i=1, 2, ..., n-1$$
 (7.32)

где α и β - пока неизвестные прогоночные коэффициенты.

По аналогии с уравнением (7.32) температуру в плоскости і-1 можно записать

$$t_{i-1}^{\tau+\Delta\tau} = \alpha_i \cdot t_i^{\tau+\Delta\tau} + \beta_i. \tag{7.33}$$

Подставим выражения (7.32) и (7.33) в уравнение (7.31):

$$A_{i} \cdot \left[\alpha_{i} \cdot \left(\alpha_{i+1} \cdot t_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} + \beta_{i+1}\right) + \beta_{i}\right] - C_{i}^{*} \cdot \left(\alpha_{i+1} \cdot t_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} + \beta_{i+1}\right) + B_{i} \cdot t_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} + F_{i} = 0$$

$$\left[\left(A_{i} \cdot \alpha_{i} - C_{i}^{*}\right) \cdot \alpha_{i+1} + B_{i}\right] \cdot t_{i+1}^{\tau + \Delta \tau} + \left(A_{i} \cdot \alpha_{i} - C_{i}^{*}\right) \cdot \beta_{i+1} + A_{i} \cdot \beta_{i} + F_{i} = 0.$$

Это уравнение будет справедливо, если

$$(A_i \cdot \alpha_i - C_i^*) \cdot \alpha_{i+1} + B_i = 0$$
 и $(A_i \cdot \alpha_i - C_i^*) \cdot \beta_{i+1} + A_i \cdot \beta_i + F_i = 0$.

Откуда получим

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i^* - A_i \cdot \alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \cdot \beta_i + F_i}{C_i^* - A_i \cdot \alpha_i}, \quad i=2, 3, ..., n-1.$$

Прогоночные коэффициенты α_2 и β_2 необходимые для начала счета, получим, сравнивая уравнения (7.28) и (7.32) при i=1.

$$t_1^{\tau+\Delta\tau}=\chi_1\cdot t_2^{\tau+\Delta\tau}+\nu_1;\ \ t_1^{\tau+\Delta\tau}=\alpha_2\cdot t_2^{\tau+\Delta\tau}+\beta_2;$$
откуда $\alpha_2=\chi_1;\ \beta_2=\nu_1.$

Итак можно определить прогоночные коэффициенты α_i и β_i (i=2,3,...,n-1).

Используя граничные условия на другой границе, определим температуру в плоскости п. Для этого сравним уравнение (7.29) и (7.32) при i=n-1

$$t_n^{\tau+\Delta\tau} = \chi_2 \cdot t_{n-1}^{\tau+\Delta\tau} + \nu_2,$$

$$t_{n-1}^{\tau+\Delta\tau} = \alpha_n \cdot t_n^{\tau+\Delta\tau} + \beta_n.$$

Решив систему уравнений, получим

$$t_n^{\tau+\Delta\tau} = \frac{\chi_2 \cdot \beta_n + \nu_2}{1 - \chi_2 \cdot \alpha_n}.$$

В остальных плоскостях по толщине тела температура находится из выражения:

$$t_{i}^{\tau+\Delta\tau}=\alpha_{i+1}\cdot t_{i+1}^{\tau+\Delta\tau}+\beta_{i+1}$$

где i = n-1, n-2,...,1.

8 ТЕОРИЯ НАГРЕВА И ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

8.1 Понятие о термически тонких и массивных телах

Термически тонкими называют тела, при нагреве или охлаждении которых заметного не возникает температур по сечению. Термически массивные тела – это тела, при нагреве (охлаждении) которых по сечению тела возникает существенный перепад температур. И в термически тонких и массивных телах существует перепад температур Δt (рисунок 8.1), но в термически тонких телах им можно пренебречь. В зависимости от этого будем использовать различный математический аппарат для расчета нагрева (охлаждения). Небольшой перепад температуры по сечению тела может быть в случае, если тело мало по размерам (например, тонкий лист), если тело ощутимых размеров нагревают с очень малой скоростью, если тело обладает большой теплопроводностью.

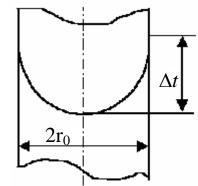


Рисунок 8.1 – К определению массивности тела

Разделение нагреваемых тел на тонкие и массивные является условным. Отнесение тела к той или иной категории определяется не только его размерами и теплофизическими свойствами, но и скоростью нагрева (охлаждения). Если тонкий лист, который нагрели в печи, охлаждать в проточной воде,

то перепад температур будет уже значительным. Тело больших размеров при весьма медленном нагреве имеет незначительные перепады температур и может рассматриваться как тонкое, и, наоборот, тонкое тело при скоростном нагреве переходит в категорию массивных. Для установления границ тонких и массивных тел пользуются числом подобия Био

$$Bi = \frac{\alpha \cdot r_0}{\lambda},\tag{8.1}$$

где α — коэффициент теплоотдачи, $B_{M}^{2}K$, характеризует интенсивность теплоотдачи; r_{0} — толщина тела, м;

 λ – коэффициент теплопроводности, $\frac{BT}{(M \cdot K)}$.

При Bi<0,25 тела относятся к термически тонким, при Bi>0,5 к термически массивным.

В том случае, если 0.25 < Bi < 0.5, то тела можно относить и к термически тонким и к термически массивным. Это на усмотрение исследователя, как он считает нужным.

Число подобия Био можно переписать

$$Bi = \frac{r_0}{\frac{\lambda}{1/\alpha}},$$

где r_0 / λ – внутреннее тепловое сопротивление, $\frac{\text{M}^2 \cdot \text{K}}{\text{Bt}}$;

$$\frac{1}{\alpha}$$
 – внешнее термическое сопротивление, $\frac{\text{M}^2 \cdot \text{K}}{\text{Bt}}$.

Тело тонкое, если оно обладает большими внешними сопротивлениями и малыми внутренними сопротивлениями.

8.2 Влияние формы тела на скорость нагрева. Коэффициент материальной нагрузки

Рассматривая процесс передачи тепла печью и процесс поглощения тепла телом, можно записать $q \cdot F \cdot d\tau$ – количество тепла, которое от печи поступает к поверхности и усваивается телом. Усвоенное тепло идет на повышение энтальпии тела $m \cdot c \cdot dt$.

В этих выражениях q – удельный тепловой поток, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$; F – тепловоспринимающая поверхность, м^2 ; $d\tau$ – бесконечно малый отрезок времени, c; m – масса тела, кг; c – теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$; dt – приращение температуры, град.

Исходя из изложенного выше, можно записать

$$q \cdot F \cdot d\tau = m \cdot c \cdot dt, \qquad (8.2)$$

откуда

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{q \cdot F}{m \cdot c},$$

где m/F — удельная масса, т.е. масса, приходящаяся на единицу поверхности нагрева, кг/м²; $dt/d\tau$ — скорость нагрева, град/с.

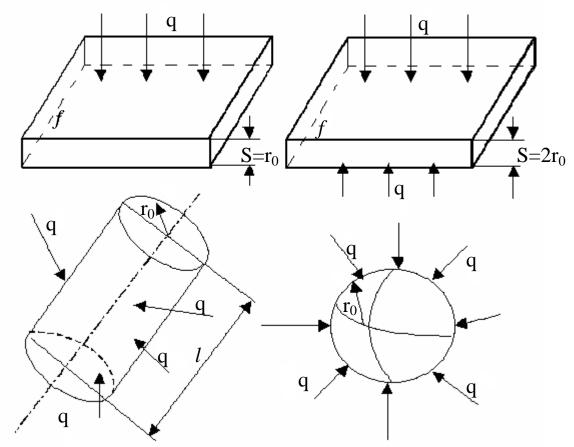


Рисунок 8.2 – К определению коэффициента материальной нагрузки

Рассмотрим как связана удельная масса с формой тела (рисунок 8.2).

Введем в рассмотрение понятие: толщина прогреваемого слоя r_0 , это толщина на которую тело прогревается с одной стороны.

1. Бесконечная плита лежит на адиабатной поверхности и греется с одной стороны удельным тепловым потоком q, т.е. нагревом через торцы можно пренебречь. Толщина прогреваемого слоя r_0 , геометрическая толщина плиты S. Поверхность нагрева F=f, масса плиты $m=V\cdot \rho=r_0\cdot f\cdot \rho$. Тогда

$$\frac{m}{F} = \frac{r_0 f \rho}{f} = \frac{r_0 \rho}{1}.$$

2. Бесконечная плита греется с двух сторон удельным тепловым потоком q. Геометрическая толщина плиты S, толщина прогреваемого слоя r_0 =S/2. Поверхность нагрева F=2f, масса плиты m=V· ρ = $2r_0f$ · ρ .

$$\frac{m}{F} = \frac{2r_0 f\rho}{2f} = \frac{r_0 \rho}{1}.$$

3. Цилиндр радиусом r_0 и длиной l. Цилиндр греется с боковой поверхности удельным тепловым потоком q. Поверхность нагрева $F=2\pi r_0 l$, масса цилиндра $m=V\rho=\pi r_0^2 l\rho$, удельная масса

$$\frac{m}{F} = \frac{\pi r_0^2 l \rho}{2\pi r_0 l} = \frac{r_0 \rho}{2}.$$

4. Шар радиусом r_0 греется равномерно по всей поверхности удельным тепловым потоком q. Поверхность нагрева шара

$$F=4\pi r_0^2$$
, масса $m=V
ho=rac{4}{3}\pi r_0^3
ho$, тогда удельная масса

$$\frac{m}{F} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho}{4\pi r_0^2} = \frac{r_0 \rho}{3}$$

В общем случае можно записать:

$$\frac{m}{F} = \frac{r_0 \rho}{k_1},$$

где k_1 – коэффициент материальной нагрузки.

Ļ	1 2		
k_1	1	2	3

Тогда

$$C_{H} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{k_1 q}{r_0 \rho c}.$$
 (8.3)

Скорость нагрева прямо пропорциональна коэффициенту материальной нагрузки. Из выражения видно, что при одинаковом определяющем размере тела r_0 и удельном тепловом потоке q скорость нагрева шара в 3 раза, а цилиндра в 2 раза больше, чем плиты.

8.3 Нагрев термически тонких тел ($Bi \rightarrow 0$) постоянным тепловым потоком

Для получения однозначного решения дифференциального уравнения теплопроводности должны быть заданы условия однозначности:

- геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела. Форма тела задается коэффициентом материальной нагрузки k_1 , размер тела - толщиной прогреваемого слоя r_0 ;

- физические условия: известны физические свойства тела теплопроводность λ , теплоемкость c и плотность тела ρ ;
- начальные условия: в начальный момент времени τ =0 температура равна $t_{\rm H}$;
- граничные условия: в качестве граничных условий заданы граничные условия 2 рода, когда задается закон изменения плотности теплового потока во времени (и частный случай q=const).

Если число подобия $Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda} \to 0$, тело термически тонкое.

Введем в рассмотрение две температурные и одну тепловую диаграммы (рисунок 8.3). Температурные диаграммы показывают изменения температуры тела во времени и по толщине тела. Поскольку тело термически тонкое, то изменение температуры по сечению тела представляет прямую линию, т.к. перепадом температур пренебрегаем. Что же буде представлять зависимость температуры от времени? Для этого воспользуемся выражением для скорости нагрева

$$C_{\scriptscriptstyle H} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{k_1 q}{r_0 \rho c}.$$

Если предположить, что теплофизические свойства тела постоянны (вычислены при средней температуре) c=const, и ρ =const, то и скорость нагрева будет величина постоянная. Это означает, что через равные промежутки времени $\Delta \tau$ температура металла будет изменяться на одинаковую величину Δt , т.е. температура металла будет меняться по линейному закону.

Как же должна меняться температура печи, чтобы обеспечить нагрев металла постоянным тепловым потоком? Это можно определить, если задаться видом теплообмена между печью и металлом. Предположим, что между печью и металлом происходит конвективный теплообмен. По закону Ньютона-Рихмана

$$q = \alpha (t_{neu} - t_{M}),$$

откуда

$$t_{neu} = t_{M} + q/\alpha. \tag{8.4}$$

В том случае, когда тепло передается от печи к металлу излучением, плотность теплового потока найдется по закону Стефана-Больцмана

$$q = c_{np} \left(\left(\frac{T_{neq}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{M}}{100} \right)^4 \right)$$

ИЛИ

$$t_{neu} = 100 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{T_{M}}{100}\right)^{4} + \frac{q}{c_{np}}} - 273.$$
 (8.5)

Из приведенных выражений следует, что температура печи для любого времени должна быть больше температуры металла.

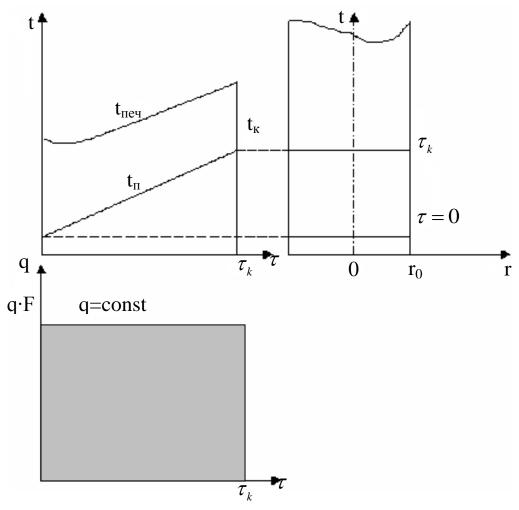


Рисунок 8.3 – Нагрев термически тонкого тела постоянным тепловым потоком

Для определения времени нагрева воспользуемся тепловой диаграммой. Вместо плотности теплового потока по оси ординат будем откладывать величину $q \cdot F$. От этого характер тепловой диаграммы не изменится, поменяется только масштаб. Тогда ордината тепловой диаграммы будет показывать количество тепла, которое подводится к металлу за единицу времени, т.е. тепловую мощность $(qF = (BT/M^2) \cdot M^2 = BT)$. Площадь тепловой

диаграммы $qF\tau$ — это количество тепла, которое усваивается металлом за время τ ($qF\tau$ =(B τ /м 2)·м 2 ·с=Дж). Усвоенное металлом тепло пойдет на изменение энтальпии металла $m\cdot\Delta i$.

За время от 0 до $\tau_{\rm K}$ температура металла изменится от начальной $t_{\rm H}$ до конечной $t_{\rm K}$, поэтому можно записать

$$q \cdot F \cdot \tau_k = m \cdot \Delta i$$
,

откуда

$$\tau_k = \frac{m \cdot \Delta i}{q \cdot F}.$$

Заменяя $\frac{m}{F} = \frac{r_0 \rho}{k_1}$ и $\Delta i = i_{\kappa} - i_{\mu}$, получим

$$\tau_{k} = \frac{r_0 \rho}{k_1 q} \left(i_k - i_{_H} \right). \tag{8.6}$$

Известно, что энтальпию можно выразить через теплоемкость и температуру $i = c_0^t t$.

Выражение (8.6) запишем в виде

$$\tau_{k} = \frac{r_{0}\rho}{k_{1}q} \left(c_{0}^{t_{k}} t_{k} - c_{0}^{t_{n}} t_{H} \right). \tag{8.7}$$

Выражения для расчета времени нагрева (8.6) и (8.7) впервые получил профессор И.Д. Семикин и эти выражения называют формулой И.Д. Семикина.

8.4 Нагрев термически тонкого тела (*Bi→0*) в печи с постоянной температурой

Для получения однозначного решения дифференциального уравнения сформулируем условия однозначности:

- геометрические условия: характеризующие форму и размеры тела. Форма тела задается коэффициентом материальной нагрузки k_1 , размер тела толщиной прогреваемого слоя r_0 ;
- физические условия: известны физические свойства коэффициент теплопроводности λ , теплоемкость c и плотность тела ρ ;
- начальные условия: известно распределение температуры по сечению тела в момент времени τ =0;
- граничные условия: в данном случае заданы граничные условия
 з рода, при которых должна быть известна температура среды и
 вид теплообмена между средой и телом; известно, что

температура печи постоянна, вид теплообмена примем конвекцией и излучением.

При нагреве в печи с постоянной температурой $t_{\text{печ}}$ =const температура металла будет увеличиваться. Удельный тепловой поток определяется из условий теплообмена: при конвективном теплообмене

$$q = \alpha (t_{ney} - t_{M})$$

при излучении

$$q = c_{np} \left(\left(\frac{T_{neu}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\scriptscriptstyle M}}{100} \right)^4 \right).$$

Из этих уравнений следует, что плотность теплового потока будет уменьшаться и при бесконечно большом времени стремиться к нулю. Скорость нагрева $C_{_{\it H}} = \frac{k_{_1}q}{r_{_0}\rho c}$ тоже будет уменьшаться и стремиться к нулю.

Температура металла будет изменяться по выпуклой кривой (за равные промежутки времени величина приращения температуры металла будет уменьшаться) и при бесконечно большом времени нагрева температура металла будет стремиться к температуре печи (рисунок 8.4). Поскольку рассматриваем нагрев термически тонкого тела ($Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda} \rightarrow 0$), то температура по сечению тела представляет прямую линию параллельную оси абсцисс.

Время нагрева можно рассчитать двумя способами.

1. Определение времени нагрева по методу тепловой диаграммы (по формуле И.Д. Семикина).

Для этой цели необходимо определить площадь под кривой теплового потока, которая показывает количество тепла, усвоенное металлом. Определить площадь под кривой не легко, поэтому введем в рассмотрение прямоугольник равновеликой площади, ордината которого \overline{q} .

Время нагрева определяем по формуле И.Д. Семикина

$$\tau_{k} = \frac{r_{0}\rho}{k_{1}\overline{q}} (i_{k} - i_{H}) = \frac{r_{0}\rho}{k_{1}\overline{q}} (c_{0}^{t_{k}} t_{k} - c_{0}^{t_{H}} t_{H}). \tag{8.8}$$

Средняя плотность теплового потока находится как среднеарифметическая величина

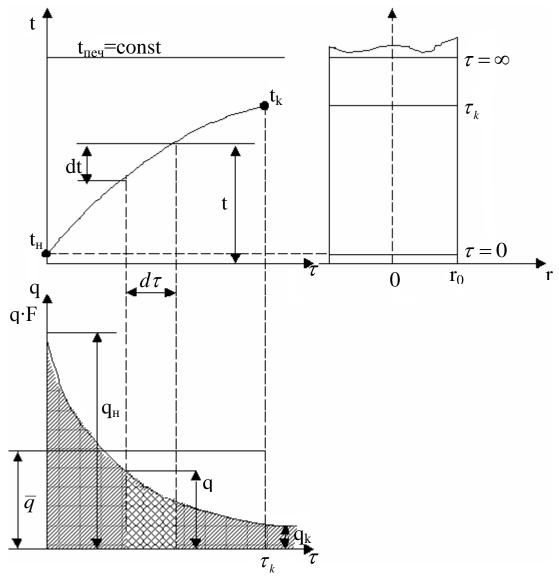


Рисунок 8.4 — Нагрев термически тонкого тела в печи с постоянной температурой

$$\overline{q} = \frac{q_{\scriptscriptstyle H} + q_{\scriptscriptstyle K}}{2}$$
, если $\frac{q_{\scriptscriptstyle H}}{q_{\scriptscriptstyle K}} \le 2$, (8.9)

или как среднелогарифмическая

$$\overline{q} = \frac{q_{_{\scriptscriptstyle H}} - q_{_{\scriptscriptstyle K}}}{\ln \frac{q_{_{\scriptscriptstyle H}}}{q_{_{\scriptscriptstyle K}}}}, \text{ если } \frac{q_{_{\scriptscriptstyle H}}}{q_{_{\scriptscriptstyle K}}} > 2.$$
 (8.10)

Плотность теплового потока в начальный момент времени

$$q_{H} = c_{np} \left(\left(\frac{T_{neq}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{H}}{100} \right)^{4} \right), \tag{8.11}$$

и в конечный момент времени

$$q_{\kappa} = c_{np} \left(\left(\frac{T_{neu}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\kappa}}{100} \right)^4 \right).$$
 (8.12)

2. Определение времени нагрева по конвективной формуле.

За элементарное время $d\tau$ (рисунок 8.4) температура металла изменится на величину dt. Количество тепла, которое получает тело за время $d\tau$, идет на изменение внутренней энергии тела

$$q \cdot F \cdot d\tau = m \cdot \overline{c} \cdot dt, \qquad (8.13)$$

преобразуем это уравнение

$$d\tau = \frac{m\overline{c}}{qF}dt. \tag{8.14}$$

Теплообмен между печью и телом осуществляется по конвективной формуле $q=\overset{-}{\alpha}(t_{ney}-t).$

Удельную массу заменим через коэффициент материальной нагрузки

$$d\tau = \frac{r_0 \rho \overline{c}}{k_1 \overline{\alpha}} \frac{dt}{\left(t_{nev} - t\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Проинтегрируем это уравнение по времени от $\tau_{\rm H}$ =0 до $\tau_{\rm K}$ и по температуре от $t_{\rm H}$ до $t_{\rm K}$.

$$\tau_{k} = \frac{r_{0}\rho\overline{c}}{k_{1}\overline{\alpha}} \left[-\ln\left(t_{neu} - t\right) \right]_{t_{k}}^{t_{k}}.$$

Тогда

$$\tau_{k} = \frac{r_{0}\rho\overline{c}}{k_{1}\overline{\alpha}} \ln \frac{t_{neu} - t_{H}}{t_{neu} - t_{k}}, \qquad (8.15)$$

где \bar{c} — средняя теплоемкость в интервале температур от $t_{\rm H}$ до $t_{\rm K}$; $\bar{\alpha}$ — средний коэффициент теплоотдачи при температурах $t_{\rm H}$ и $t_{\rm K}$.

$$\overline{\alpha}$$
 – средний коэффициент теплоотдачи при температурах t_{H} и t_{K} . $\overline{c} = c_{t_{\text{H}}}^{t_{\text{K}}} = \frac{\left(c_{0}^{t_{\text{K}}}t_{k} - c_{0}^{t_{\text{H}}}t_{{}_{\text{H}}}\right)}{t_{k} - t_{{}_{\text{H}}}} = \frac{\left(i_{k} - i_{{}_{\text{H}}}\right)}{t_{k} - t_{{}_{\text{H}}}}.$ (8.16)

Средняя теплоемкость c_0^t и энтальпия приводятся в литературе.

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\frac{\overline{\alpha}}{\alpha} = \frac{\alpha_{H} + \alpha_{K}}{2}.$$
 (8.17)

Конвективной формулой можно пользоваться, когда тепло передается излучением, тогда (8.18):

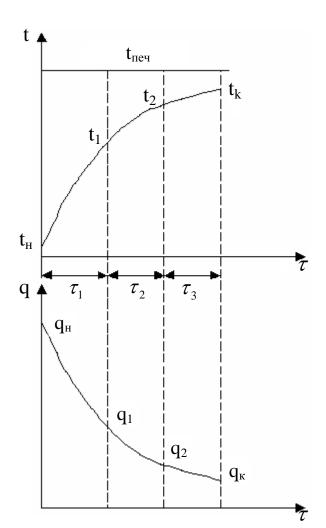


Рисунок 8.5 – Разбивка нагрева на интервалы

$$\alpha_{H} = \frac{c_{np} \left(\left(\frac{T_{neq}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{H}}{100} \right)^{4} \right)}{t_{neq} - t_{H}};$$

$$\alpha_{K} = \frac{c_{np} \left(\left(\frac{T_{neq}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{K}}{100} \right)^{4} \right)}{t_{neq} - t_{K}}.$$

Для того, чтобы повысить точность, расчет нагрева ведется по интервалам (рисунок 8.5). Температуру металла можно либо принять любой в интервале $t_{\rm H}$ до $t_{\rm K}$, либо вычислить по ориентировочным зависимостям

$$t_1 \approx t_{_H} + 0.5(t_{_k} - t_{_H})$$

 $t_2 \approx t_{_H} + 0.75(t_{_k} - t_{_H}).$

В данном интервале температур определяют среднюю теплоемкость и средний коэффициент теплоотдачи, если расчет ведется по конвективной формуле

$$c_{t_{n}}^{t_{1}} = \frac{\left(c_{0}^{t_{1}}t_{1} - c_{0}^{t_{n}}t_{n}\right)}{t_{1} - t_{n}}, c_{t_{n}}^{t_{2}} = \frac{\left(c_{0}^{t_{2}}t_{2} - c_{0}^{t_{1}}t_{1}\right)}{t_{2} - t_{1}} \text{ и т. д.}$$

$$\bar{\alpha}_{1} = \frac{\alpha_{n} + \alpha_{1}}{2}, \ \bar{\alpha}_{2} = \frac{\alpha_{1} + \alpha_{2}}{2} \text{ и т. д.}$$

$$\alpha_{1} = \frac{c_{np}\left(\left(\frac{T_{neu}}{100}\right)^{4} - \left(\frac{T_{1}}{100}\right)^{4}\right)}{t_{neu} - t_{1}}; \ \alpha_{2} = \frac{c_{np}\left(\left(\frac{T_{neu}}{100}\right)^{4} - \left(\frac{T_{2}}{100}\right)^{4}\right)}{t_{neu} - t_{2}}.$$

Если расчет ведется по методу тепловой диаграммы, тогда по таблице определяется энтальпия по температуре в указанных точках и вычисляется плотность теплового потока $q_{\rm H}$, $q_{\rm 1}$ и т.д. По значениям плотности теплового потока на границах интервалов определяется $q_{\rm H}$.

8.5 Нагрев термически массивного тела постоянным тепловым потоком

Для термически массивного тела число подобия Био $Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda} > 0,5$, т.е. при расчете нагрева по сечению тела возникает перепад температур, которым нельзя пренебречь (рисунок 8.6).

Сформулируем условия однозначности:

- геометрические условия: известны коэффициент материальной нагрузки k_1 , характеризующий форму тела и толщина r_0 ;
- физические условия: заданы коэффициент теплопроводности λ , теплоемкость c и плотность ρ ;
- начальные условия: в начальный момент времени $\tau=0$ температура поверхности t_{Π} , температура середины тела t_{Π} , среднемассовая температура \bar{t} равны начальной температуре, т.е. при $\tau=0$; $t_{\Pi}=t_{\Pi}=\bar{t}=t_{H}$;
- граничные условия: заданы граничные условия 2 рода, характеризующие закон изменения плотности теплового потока во времени, который подводится к поверхности тела и телом

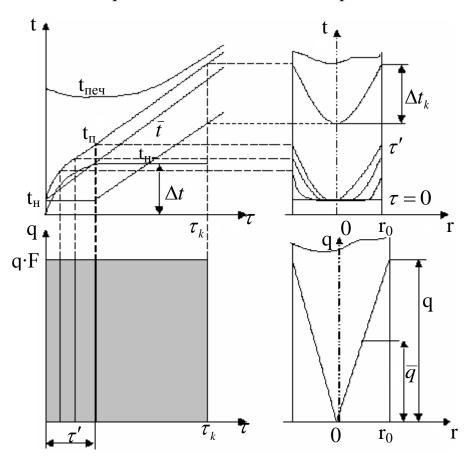


Рисунок 8.6 — Температурные и тепловые диаграммы нагрева термически массивного тела (q=const)

поглощается (частный случай q=const).

Рассмотрим инженерную модель прогрева термически массивного тела. Процесс нагрева представляет последовательный нагрев слоя за слоем. От подведенной порции тепла первый слой повысил свою температуру. На втором шаге температура первого слоя еще повысится, но на меньшую потому величину, ЧТО часть тепла ЭТОТ слой следующему. Чтобы тело прогрелось до середины, необходимо какое-то время τ , которое называется инерционным временем. Инерционное время – это время, необходимое для того, чтобы тепловой поток прошел всю толщу тела и начался подъем температуры в центре тела.

В начальный период нагрева в течение τ преимущественно поверхностные слои тела, вследствие температура поверхности вначале очень быстро повышается. После инерционного периода происходит подъем температуры во По сечению устанавливается всех точках тела. тела Этот параболическое распределение температуры. период нагрева называется регулярным.

В процессе нагрева интерес представляют 3 температуры: температура поверхности $t_{\rm n}$, середины $t_{\rm u}$ и среднемассовая \bar{t} .

Скорость нагрева

$$C_{H} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial \tau} = \frac{k_{1}q}{r_{0}\rho c}.$$
 (8.19)

Если принять, что физические свойства тела постоянны (λ =const, c=const, ρ =const), то скорость нагрева будет постоянной величиной. Поскольку средняя по массе температура наиболее точно характеризует температурное состояние тела, то скорость нагрева определяется по среднемассовой температуре. Среднемассовая температура меняется по линейному закону.

Как будут изменяться температуры поверхности и середины заготовки? К поверхности тела поступает удельный тепловой поток q=const, который телом поглощается. Распространяясь по толщине тела, удельный тепловой поток расходуется, и на оси он равен нулю. В законе Фурье считается, что величина плотности теплового потока на рассматриваемой толщине является постоянной. За такую постоянную величину примем средний удельный тепловой поток

$$\overline{q} = \frac{q+0}{2} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}$$

ИЛИ

$$q = \frac{2\lambda \Delta t}{\Delta r},$$

где $\Delta t = t_{\scriptscriptstyle \Pi} - t_{\scriptscriptstyle \parallel}, \, \Delta r = r_0.$ Откуда

$$\Delta t = \frac{q r_0}{2 \lambda}.$$

При условии нагрева q=const удельный тепловой поток по толщине слоя меняется по закону прямой линии, а поэтому коэффициент усреднения плотности теплового потока нагреваемого слоя $k_2 = 2$ ДЛЯ всех тел простой геометрической формы. В общем случае выражение для перепада температур запишется

$$\Delta t = \frac{qr_0}{k_2 \lambda}. ag{8.20}$$

Так как принято, что коэффициент теплопроводности величина постоянная, то перепад температур по сечению тела не меняется во времени и температуры поверхности и середины тела будут меняться параллельно друг другу.

Среднемассовая температура может быть рассчитана по формуле

$$\bar{t} = t_{_{\mathcal{U}}} + \frac{\Delta t}{k_{_{3}}},\tag{8.21}$$

где k_3 — коэффициент усреднения температуры по сечению тела. Для случая нагрева q=const значения коэффициентов k_2 и k_3 приведены в таблице 8.1.

Коэффициент формы тела равняется $k=k_1k_2k_3$.

Среднемассовую температуру можно определить по скорости нагрева (8.19), тогда, вычислив по (8.20) перепад температур, из выражения (8.21) определяем температуру середины заготовки t_{Π} . Температура поверхности $t_{\Pi} = t_{\Pi} + \Delta t$.

Зная вид теплообмена между печью и телом, определяем температуру печи. Если в печи тепло передается конвекцией, то из закона Ньютона - Рихмана определяем температуру печи

$$t_{neu} = \frac{q}{\alpha} + t_n. \tag{8.22}$$

Таблица 8.1 — Значения коэффициентов k_1 , k_2 и k_3 для тел простой геометрической формы.

Форма Коэф-ы				Примечание
k_1	1	2	3	Коэффициент материальной нагрузки
k_2	2	2	2	Коэффициент усреднения теплового потока по толщине тела
k_3	3	2	5/3	Коэффициент усреднения температуры по толщине тела
k	6	8	10	Коэффициент формы тела

При теплообмене излучением температура печи определяется из закона Стефана-Больцмана

$$t_{neq} = 100 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{T_n}{100}\right)^4 + \frac{q}{c_{np}}} - 273. \tag{8.23}$$

С увеличением времени нагрева растет среднемассовая температура, температура поверхности и печи.

Общее время нагрева находится по методу тепловой диаграммы.

$$q \cdot F \cdot \tau_{k} = m(i_{k} - i_{k})$$

$$\tau_{k} = \frac{m}{qF}(i_{k} - i_{k})$$

$$\frac{m}{F} = \frac{r_{0}\rho}{k}; i_{k} = c_{0}^{\bar{t}_{k}}\bar{t}_{k}; i_{k} = c_{0}^{\bar{t}_{n}}\bar{t}_{k}$$

$$(8.24)$$

ИЛИ

$$\tau_{k} = \frac{r_{0}\rho}{k_{1}q} (i_{k} - i_{H}) \quad \tau_{k} = \frac{r_{0}\rho}{k_{1}q} (c_{0}^{\bar{t}_{k}} \bar{t}_{k} - c_{0}^{\bar{t}_{H}} \bar{t}_{H}). \tag{8.25}$$

Инерционное время

$$\tau' = \frac{r_0^2}{k \cdot \alpha},\tag{8.26}$$

где r_0 – толщина прогреваемого слоя, м; k – коэффициент формы тела;

a - коэффициент температуропроводности, м²/с.

Инерционное время определяется формой тела, теплофизическими свойствами, размером прогреваемого слоя и не зависит от величины удельного теплового потока.

8.6 Нагрев термически массивного тела в печи с постоянной температурой

Как всегда, чтобы из бесконечного количества решений выделить рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называются условиями однозначности.

Они включают:

- геометрические условия: должны быть заданы размеры и форма тела, определяемая коэффициентом материальной нагрузки;
- физические условия: известны физические свойства тела (коэффициент теплопроводности λ , теплоемкость c и плотность ρ);
- начальные условия: известно распределение температуры по сечению тела в начальный момент времени (при $\tau=0$ $t_{\Pi}=t_{\Pi}=\bar{t}=t_{H}$) (рисунок 8.7);
- граничные условия: заданы граничные условия 3 рода $(t_{\text{печ}} = const)$ и должен быть задан вид теплообмена между печью и телом.

Предположим, что теплообмен осуществляется путем излучения

$$q = c_{np} \left(\left(\frac{T_{neu}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_n}{100} \right)^4 \right).$$

Если в печь с постоянной температурой ($t_{\text{печ}}$ =const) поместить тело с более низкой температурой, то температура тела будет увеличиваться, а плотность теплового потока уменьшаться и стремиться к нулю при бесконечно большом времени нагрева.

При известном удельном тепловом потоке можно определить скорость нагрева

$$C_{\scriptscriptstyle H} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{k_{\scriptscriptstyle 1}q}{r_{\scriptscriptstyle 0}\rho c} \,.$$

Перепад температур по толщине тела

$$\Delta t = \frac{qr_0}{k_2 \lambda} \,. \tag{8.27}$$

Поскольку плотность теплового потока уменьшается во времени, то аналогично будут уменьшаться скорость нагрева и перепад температур Δt , они тоже будут стремиться к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

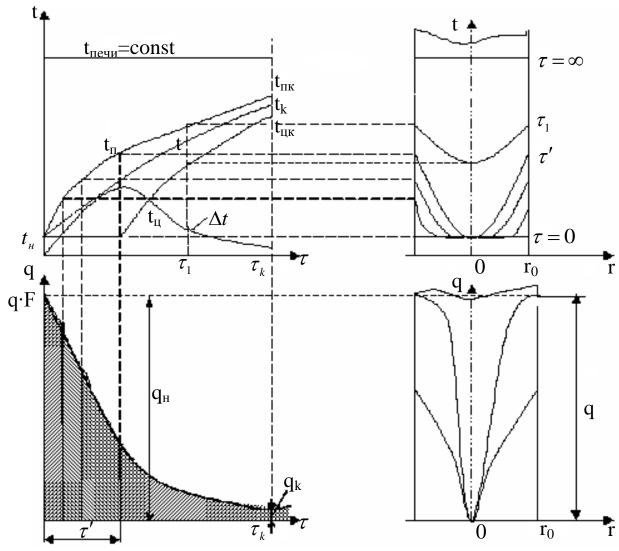


Рисунок 8.7 — Температурные и тепловые диаграммы нагрева термически массивного тела при $t_{\text{печ}}$ =const

Среднемассовая температура

$$\bar{t} = t_u + \frac{\Delta t}{k_3} = t_n - \frac{k_3 - 1}{k_3} \Delta t.$$
 (8.28)

Удельный тепловой поток не является постоянной величиной, он меняется во времени, а значит и по сечению тела. В общем случае коэффициент усреднения удельного теплового потока по сечению тела и коэффициент усреднения температур по сечению тела являются функциями числа подобия Bi

$$k_2 = f(Bi, \phi opmы)$$
 ; $k_3 = f(Bi, \phi opmы)$.

Зависимость k_2 и k_3 от Bi приводится в справочниках.

Методика прогрева термически массивного тела изложена в предыдущем параграфе.

Инерционное время

$$\tau' = \frac{r_0^2}{k \cdot \alpha} \,. \tag{8.29}$$

Время нагрева термически массивного тела в печи с постоянной температурой можно определить несколькими способами:

1. По методу тепловой диаграммы, для этого вычислим площадь под кривой удельного теплового потока

$$\overline{q} \cdot F \cdot \tau_{k} = m(i_{k} - i_{k}), \quad \tau_{k} = \frac{m}{\overline{q}F}(i_{k} - i_{k}), \\
\frac{m}{F} = \frac{r_{0}\rho}{k_{1}}; \quad i_{k} = c_{0}^{\bar{t}_{k}}\bar{t}_{k}; \quad i_{k} = c_{0}^{\bar{t}_{k}}\bar{t}_{k} \\
\tau_{k} = \frac{r_{0}\rho}{k_{1}\overline{q}}(i_{k} - i_{k}) = \frac{r_{0}\rho}{k_{1}\overline{q}}(c_{0}^{\bar{t}_{k}}\bar{t}_{k} - c_{0}^{\bar{t}_{k}}\bar{t}_{k}),$$

где

$$\overline{q} = \frac{q_{\scriptscriptstyle H} + q_{\scriptscriptstyle K}}{2}$$
, если $\frac{q_{\scriptscriptstyle H}}{q_{\scriptscriptstyle K}} \le 2$,

ИЛИ

$$\overline{q} = \frac{q_{_{\scriptscriptstyle H}} - q_{_{\scriptscriptstyle K}}}{\ln \frac{q_{_{\scriptscriptstyle H}}}{q_{_{\scriptscriptstyle K}}}}, \, \mathrm{если} \, \frac{q_{_{\scriptscriptstyle H}}}{q_{_{\scriptscriptstyle K}}} > 2.$$

2. По конвективной формуле для термически тонких тел с поправкой на массивность

$$\tau = \frac{r_0 \rho \overline{c}}{k_1 \overline{\alpha}} m \ln \frac{t_{neq} - \overline{t}_{H}}{t_{neq} - \overline{t}_{k}}, \qquad (8.30)$$

где т – поправка на массивность

$$m = 1 + \frac{Bi}{k_1 + 2} = 1 + \frac{\alpha r_0}{\lambda (k_1 + 2)}.$$
 (8.31)

Средняя теплоемкость

$$\overline{c} = c_{\bar{t}_{H}}^{\bar{t}_{k}} = \frac{c_{0}^{\bar{t}_{k}} \bar{t}_{k} - c_{0}^{\bar{t}_{H}} \bar{t}_{H}}{\bar{t}_{k} - \bar{t}_{H}} = \frac{i_{k} - i_{H}}{\bar{t}_{k} - \bar{t}_{H}}.$$
 (8.32)

Средний коэффициент теплоотдачи

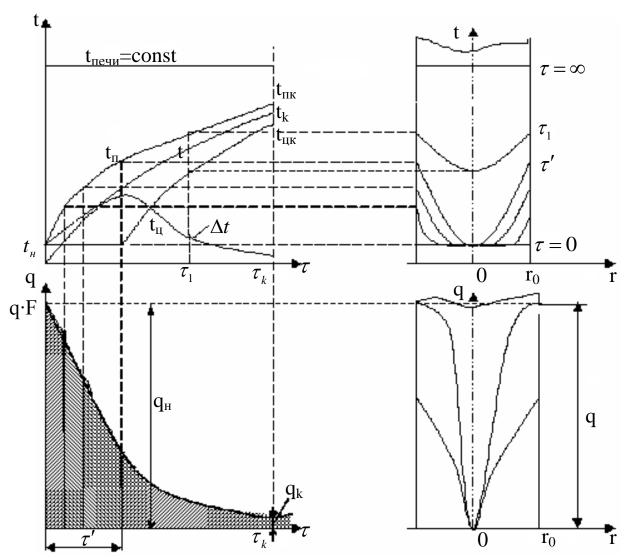


Рисунок 8.7 — Температурные и тепловые диаграммы нагрева термически массивного тела при $t_{\text{печ}} = const$

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_{\scriptscriptstyle H} + \alpha_{\scriptscriptstyle k}}{2}.$$

где

$$\alpha_{H} = \frac{c_{np} \left(\left(\frac{T_{neu}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{nH}}{100} \right)^{4} \right)}{t_{neu} - t_{nH}}; \ \alpha_{K} = \frac{c_{np} \left(\left(\frac{T_{neu}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{nK}}{100} \right)^{4} \right)}{t_{neu} - t_{nK}}. \quad (8.33)$$

Для повышения точности расчета весь диапазон температур разбивается на ряд интервалов (см. нагрев термически тонких тел при $t_{\text{печ}} = const$).

3. Расчет времени нагрева с использованием графиков и чисел подобия.

Для пластины, имеющей в начальный момент времени одинаковую температуру по всему сечению $\bar{t}_{\scriptscriptstyle H}$ и нагревающейся в печи с постоянной температурой $t_{\scriptscriptstyle \Pi \rm e u}$, решение дифференциального уравнения в виде ряда имеет вид

$$t(r,\tau) = t_{neu} - (t_{neu} - \bar{t}_{H}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_{i}}{\mu_{i} + \sin \mu_{i} \cos \mu_{i}} \cos \left(\mu_{i} \frac{r}{r_{0}}\right) e^{-\mu_{i}^{2} \frac{\alpha \tau}{r_{0}^{2}}},$$

где $\mu_{\rm i}$ – корни трансцендентного уравнения $ctg\mu_{\rm i}=\frac{\mu_{\rm i}}{Bi}$.

В общем виде можно записать

$$\frac{t(r,\tau)-t_{neu}}{\bar{t}_{_{H}}-t_{neu}}=F\left(\frac{a\tau}{r_{_{0}}^{2}},\frac{\alpha r_{_{0}}}{\lambda},\frac{r}{r_{_{0}}}\right).$$

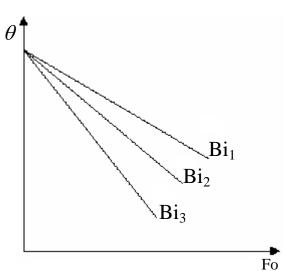


Рисунок 8.8 – Примерный вид номограммы

Обозначив
$$heta=rac{t_{nev}-t(r, au)}{t_{nev}-\overline{t_{_H}}};$$
 $Bi=rac{lpha r_0}{\lambda}; \qquad Fo=rac{lpha\, au}{r_o^2} \qquad -$

число подобия Фурье; $X = \frac{r}{r_0}$ — относительная координата (при r=0 X=0 — середина тела, при $r=r_0$ X=1 — поверхность).

Тогда
$$\theta = F(Fo, Bi, X)$$
.

Для решения такого уравнения построены номограммы (рисунок 8.8).

Номограммы строятся для определенного значения X. Поскольку интерес представляют температуры на поверхности и в середине тела, то номограммы строят обычно для X=0 и X=1.

Пусть требуется рассчитать время τ , которое необходимо для нагрева тела (пластины) от начальной температуры $t_{\rm H}$ до температуры поверхности $t_{\rm IIK}$ в печи с постоянной температурой $t_{\rm IIEH}$, также рассчитать какая будет температура середины тела в конечный момент времени.

Схема расчета с помощью номограмм следующая.

1. Рассчитываем относительную температуру Θ , температура $t(r, \tau)$ это ничто иное, как $t_{\text{пк}}$.

$$\theta = \frac{t_{neu} - t_{n\kappa}}{t_{neu} - \bar{t}_{u}}.$$
(8.34)

Поскольку задана температура поверхности, то X=1.

2. Находим число Био;

$$Bi = \frac{\overline{\alpha}r_0}{\lambda},$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_{_{_{\mathit{H}}}} + \alpha_{_{_{\mathit{K}}}}}{2}$$

где

$$\alpha_{H} = \frac{c_{np} \left(\left(\frac{T_{neq}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{nH}}{100} \right)^{4} \right)}{t_{neq} - t_{H}};$$

$$\alpha_{K} = \frac{c_{np} \left(\left(\frac{T_{neq}}{100} \right)^{4} - \left(\frac{T_{nK}}{100} \right)^{4} \right)}{t - t}.$$

3. По соответствующей номограмме (X=1, форма тела – пластина) для найденного Θ движемся параллельно оси абсцисс до найденного Bi, затем опускаясь вниз, параллельно оси ординат, находим значение F_0 .

$$Fo = \frac{a\tau}{r_0^2}; \quad a = \frac{\lambda}{c\rho}; \quad \tau = \frac{Fo \cdot r_0^2}{a}$$

Для нахождения температуры центра по известным Fo и Bi определяем по номограмме ($X\!\!=\!\!0$, форма тела — пластина) значения Θ

$$\theta = \frac{t_{neu} - t_{u}}{t_{neu} - \bar{t}_{u}} \quad t_{u} = t_{neu} - \theta (t_{neu} - \bar{t}_{u}). \tag{8.35}$$

8.7 Несимметричный нагрев тел

Во всех предыдущих случаях рассматривался симметричный нагрев, т.е. нагрев с одинаковыми скоростями или при одинаковых температурах печи с обоих сторон плиты, цилиндра или тел другой формы. Следовательно, в процессе нагрева получалось симметричное распределение температуры (вершина параболы совпадает с геометрической осью тела) (рисунок 8.9а).

Между тем в заводской практике сталкиваемся со случаями несимметричного нагрева, дающими несимметричное распределение температуры по сечению тела. Например, ряд заготовок или слитков нагреваются неодинаково с разных сторон, в результате получается несимметричный нагрев. При несимметвершина параболы, ричном нагреве изображающей температур, будет смещена относительно распределение середины, следовательно, минимальная температура будет сдвинута относительно геометрической середины.

Если геометрическая толщина тела S, то расчетная толщина r_0 = μS , где μ — коэффициент несимметричности нагрева. Коэффициент несимметричности ориентировочно можно

определить по следующей зависимости
$$\mu = \frac{q_1}{q_1 + q_2}$$
,

где q_1 и q_2 – удельные тепловые потоки, подводимые к телу с двух сторон.

Если q_1 = q_2 , т.е. нагрев симметричный, коэффициент несимметричности μ =0.5 и r_0 =0.5S.

Если нагрев несимметричный $q_1 > q_2$ (рисунок 8.9б) $0.5 < \mu < 1$ и условно пунктирной линией изображено, какое должно быть тело при симметричном нагреве. Когда осуществляется односторонний нагрев, q_2 =0 и коэффициент несимметричности μ =1 (рисунок 8.9в).

Бывают случаи нагрева, когда с одной стороны подводится тепловой поток, а с другой тепло теряется, тогда коэффициент несимметричности $\mu > 1$ (рисунок 8.9г).

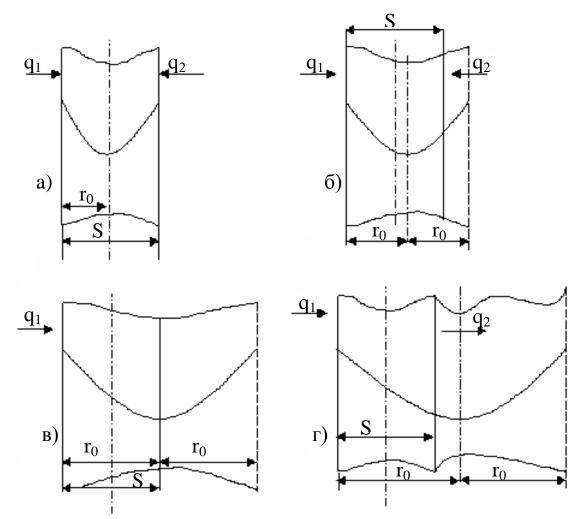


Рисунок 8.9 – Схемы несимметричного нагрева

8.8 Теплообменные аппараты. Рекуперативные теплообменники

Теплообменным аппаратом называют устройство, в котором осуществляется процесс передачи тепла от одного теплоносителя к другому. По принципу действия теплообменные аппараты могут быть разделены на рекуперативные, регенеративные и смесительные.

Рекуперативными называются такие аппараты, в которых тепло от горячего теплоносителя к холодному передается через разделяющую их стенку. Примером таких аппаратов являются рекуператоры, подогреватели, конденсаторы и т.п.

Регенеративными называются аппараты, в которых одна и та же поверхность нагрева омывается то горячим, то холодным теплоносителем. При протекании горячей жидкости тепло воспринимается стенками аппарата и в них аккумулируется, при протекании холодной жидкости это аккумулированное тепло ею

таких Пример аппаратов воспринимается. регенераторы стеклоплавильных печей, мартеновских И нагревательных воздухоподогреватели доменных печей и колодцев, смесительных аппаратах процесс теплопередачи происходит путем непосредственного соприкосновения и смешения горячего и холодного теплоносителя. В этом случае теплопередача протекает одновременно с материальным обменом.

Если в рекуперативном теплообменном аппарате горячая и холодная жидкости протекают параллельно И В ОДНОМ направлении, то такая схема движения называется прямотоком, если жидкости протекают параллельно, HO В омкцп противоположном направлении – противотоком. Если жидкости протекают в перекрестном направлении – перекрестный ток.

Помимо таких простых схем на практике осуществляются и сложные: одновременно прямоток и противоток, многократно перекрестный ток. Из графиков (рисунок 8.10) следует, что при холодной прямотоке конечная температура жидкости всегда ниже конечной температуры горячей жидкости t_1'' . При противотоке же конечная температура холодной жидкости t_2'' конечной может быть выше температуры горячей Следовательно, при одной и той же начальной температуре холодной жидкости при противотоке ее можно нагреть до более высокой температуры, чем при прямотоке.

Температурный напор вдоль поверхности при прямотоке изменяется сильнее, чем при противотоке. Вместе с тем среднее значение температурного напора при противотоке больше, чем при прямотоке. За счет только этого фактора теплообменник при противотоке получается компактнее.

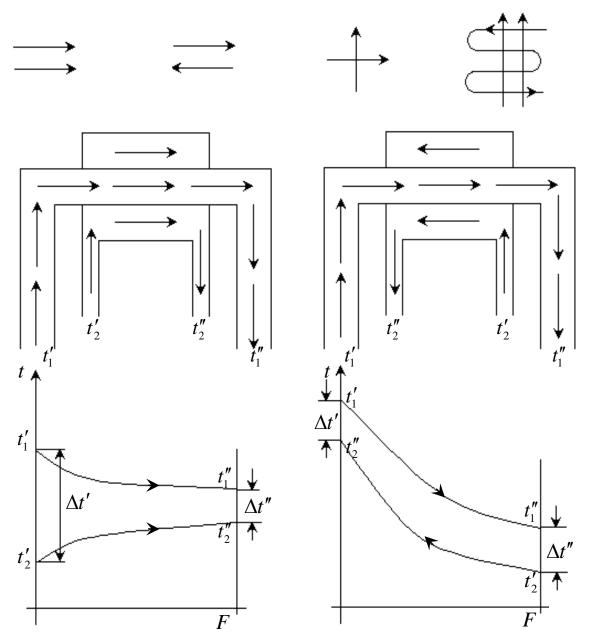


Рисунок 8.10 – Изменение температуры вдоль поверхности теплообменника при прямотоке и противотоке

8.8.1 Основные положения теплового расчета

Тепловой расчет теплообменного аппарата может быть конструкторским, целью которого является определение площади поверочным, поверхности теплообмена И при котором аппарата устанавливается режим работы И определяются теплоносителей. температуры В обоих случаях конечные основными расчетными уравнениями являются уравнение теплопередачи

$$Q = k(t_1 - t_2)F$$
, BT (8.36)

и уравнение теплового баланса

$$Q_1 = Q_2 + \Delta Q, \tag{8.37}$$

где

$$Q_1 = G_1 c_1 \delta t_1 = G_1 c_1 (t_1' - t_1'') -$$

количество тепла, отданное горячим теплоносителем, Вт;

$$Q_2 = G_2 c_2 \delta t_2 = G_2 c_2 (t_2'' - t_2') -$$

количество тепла, воспринятое холодным теплоносителем, Вт;

 ΔQ – потери тепла в окружающее пространство;

 G_1 , G_2 — массовые расходы горячего и холодного теплоносителей, $\kappa \Gamma/c$;

 c_1, c_2 – удельные теплоемкости теплоносителей, Дж/(кг·К);

 t_1' , t_1'' – температуры горячего теплоносителя на входе и выходе из аппарата, °C;

 t_2' , t_2'' — температуры холодного теплоносителя на входе и выходе из аппарата, °C.

При выводе расчетных формул теплопередачи было принято, что в данной точке или сечении теплообменного устройства температура рабочей жидкости постоянна. В общем случае температура рабочих жидкостей в теплообменниках изменяется: горячая охлаждается, а холодная — нагревается. Вместе с этим изменяется и температурный напор между ними $\Delta t_i = (t_1 - t_2)_i$. В таких условиях уравнение теплопередачи (8.36) применимо лишь в дифференциальной форме к элементу поверхности dF

$$dQ = k_i \Delta t_i dF$$
.

Общее количество тепла, переданное через всю поверхность, определяется интегралом

$$dQ = \int_{0}^{F} k_{i} \Delta t_{i} dF = k \overline{\Delta t} F.$$
 (8.38)

Это и есть расчетное уравнение теплопередачи. Здесь Δt среднее значение температурного напора по всей поверхности нагрева. В тепловых расчетах важное значение имеет величина, называемая водяным эквивалентом, W, $B\tau/K$

$$W = G \cdot c \,, \tag{8.39}$$

где G — массовый расход теплоносителя; c — теплоемкость теплоносителя.

$$G = \rho \cdot w \cdot f$$
,

где ρ – плотность теплоносителя, кг/м³; w – скорость теплоносителя, м/с; f – площадь сечения канала, м².

Если величину W ввести в уравнение теплового баланса (8.37), то оно примет вид

$$W_1(t_1'-t_1'')=W_2(t_2''-t_2'),$$

откуда

$$\frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \frac{W_2}{W_1}.$$
 (8.40)

Последнее означает, что отношение изменений температур рабочих жидкостей обратно пропорционально отношению их водяных эквивалентов. Такое соотношение справедливо как для всей поверхности нагрева F, так и для каждого ее элемента dF:

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{W_2}{W_1},$$

где dt_1 и dt_2 — изменение температуры рабочих жидкостей на элементе поверхности.

8.8.2 Средний температурный напор. Коэффициент теплопередачи

При выводе формул осреднения температурного напора

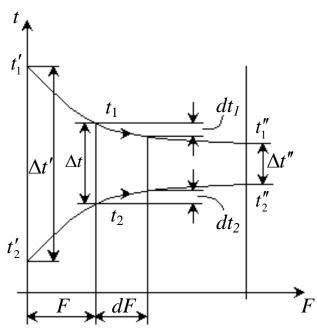


Рисунок 8.11 – Изменение температуры теплоносителя при прямотоке

рассмотрим простейший теплообменный аппарат, работающий по схеме прямотока (рисунок 8.11).

Количество тепла, передаваемое в единицу времени от горячей жидкости к холодной через элемент поверхности dF определяется уравнением $dQ = k(t_1 - t_2)dF$ (8.41)

При этом температура горячей жидкости понизится на dt_1 , а холодной повысится на dt_2 . Следовательно,

$$dQ = -G_1 c_1 dt_1 = G_2 c_2 dt_2,$$

откуда

$$dt_1 = -dQ/(G_1c_1) = -dQ/W_1$$
,

$$dt_2 = dQ/(G_2c_2) = dQ/W_2$$
.

Изменение температурного напора при этом

$$dt_1 - dt_2 = d(t_1 - t_2) = -\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)dQ = -mdQ, \quad (8.42)$$

где
$$m = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}$$
.

Подставляя в уравнение (8.42) значение dQ из уравнения (8.41), получаем

$$d(t_1-t_2) = -mk(t_1-t_2)dF$$
.

Обозначим $\Delta t = t_1 - t_2$, тогда

$$\frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mkdF. \tag{8.43}$$

Если значения m и k постоянны, то интегрируя уравнение (8.43), получаем

$$\int_{\Delta t}^{\Delta t} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mk \int_{0}^{F} dF$$

ИЛИ

$$\ln \Delta t - \ln \Delta t' = -mkF;$$

$$\ln \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right) = -mkF \tag{8.43'}$$

откуда потенцируя, получаем

$$\Delta t = \Delta t' e^{-mkF}, \qquad (8.44)$$

где Δt — местное значение температурного напора (t_1-t_2) , относящееся к элементу поверхности теплообмена.

Из уравнения (8.44) видно, что вдоль поверхности теплообмена напор меняется по экспоненциальному закону. Зная

этот закон, легко установить и среднее значение температурного напора $\overline{\Delta t}$. На основании теоремы о среднем (при k=const) имеем

$$\overline{\Delta t} = \frac{1}{F} \int_{0}^{F} \Delta t dF = \frac{1}{F} \int_{0}^{F} \Delta t' e^{-mkF} dF = \frac{\Delta t'}{-mkF} \left(e^{-mkF} - I \right). \tag{8.45}$$

Подставляя в уравнение (8.45) значение mkF и e^{-mkF} из (8.43') и (8.44) и имея в виду, что согласно рисунку 8.11 в конце поверхности нагрева $\Delta t = \Delta t''$, окончательно имеем:

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t'}{\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'}} \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'} - I \right) = \frac{\Delta t' (\Delta t - \Delta t')}{\Delta t' \ln \frac{\Delta t}{\Delta t'}};$$

$$\overline{\Delta t} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}};$$

$$\overline{\Delta t} = \frac{\left(t_1' - t_2' \right) - \left(t_1'' - t_2'' \right)}{\ln \frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''}}.$$

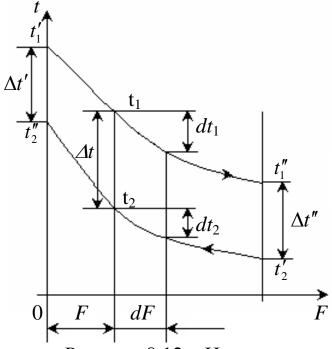


Рисунок 8.12 – Изменение температуры при противотоке

Такое значение температурного напора называется среднелогарифмическим.

Точно таким же образом выводится формула осреднения температурного напора и для противотока (рисунок 8.12). Количество тепла, которое отдает горячий теплоноситель

$$dQ_1 = -G_1c_1dt_1.$$

Количество тепла, которое получит холодный теплоноситель

$$dQ_2 = -G_2 c_2 dt_2.$$

Знак «—» указывает, что температуры t_1 и t_2 убывают по ходу горячего теплоносителя.

$$\begin{split} dt_1 - dt_2 &= -\frac{dQ}{W_1} + \frac{dQ}{W_2}, \\ d(t_1 - t_2) &= -dQ \bigg(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \bigg) = -mdQ, \end{split}$$

где
$$m = \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}$$
.

Дальнейший вывод ничем не отличается от прямотока.

Окончательная формула для среднего логарифмического температурного напора при противотоке имеет вид

$$\overline{\Delta t} = \frac{\left(t_1' - t_2''\right) - \left(t_1'' - t_2'\right)}{\ln \frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}}.$$
(8.46)

При равенстве величин W_1 и W_2 в случае противотока (m=0) имеем $\Delta t = \Delta t'$. В этом случае температурный напор по всей поверхности постоянен

$$\Delta t = \Delta t' = t_1' - t_2'' = \Delta t'' = t_1'' - t_2'.$$

Вывод формул среднелогарифмического ДЛЯ температурного напора сделан в предположении, что расход и рабочих жидкостей, коэффициент теплоемкость a также поверхности теплопередачи вдоль нагрева остаются постоянными.

В тех случаях, когда температура рабочих жидкостей вдоль поверхности нагрева изменяется незначительно, средний температурный напор можно вычислить как среднеарифметическое из крайних напоров $\Delta t'$ и $\Delta t''$

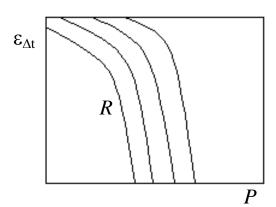


Рисунок 8.13 — Пример вспомогательного графика

$$\overline{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\Delta t' + \Delta t'' \right) = \frac{\Delta t'}{2} \left(1 + \frac{\Delta t''}{\Delta t'} \right).$$

Среднеарифметическое значение температурного напора всегда больше среднелогарифмического, но при $\Delta t''/\Delta t' > 0,6$ они отличаются друг от друга менее, чем на 3%. Такая погрешность в технических расчетах вполне допустима. Для аппаратов с перекрестным и

смешанным током рабочих жидкостей задача об усреднении температурного напора отличается сложностью математических выкладок. Для наиболее часто встречающихся случаев результаты решения представляются в виде графиков рисунок 8.13. При помощи их расчет среднего температурного напора производится следующим образом.

Вычисляются вспомогательные величины P и R:

$$P = \frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = \frac{\delta t_2}{\Delta t'},$$

$$R = \frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2}.$$

По этим данным из соответствующего вспомогательного графика находится поправка $\epsilon_{\Delta t.}$ В общем случае средний температурный напор определяется формулой

$$\frac{\overline{\Delta t}}{\Delta t} = \varepsilon_{\Delta t} \frac{\left(t_1' - t_2''\right) - \left(t_1'' - t_2'\right)}{\ln \frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}}.$$
(8.47)

Для плоской стенки коэффициент теплопередачи

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{S}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \text{ BT/(M}^2 \cdot \text{K}),$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты теплоотдачи от горячего теплоносителя к стенке теплообменника и от стенки теплообменника к холодному теплоносителю.

В трубчатых рекуператорах коэффициент теплопередачи следует определять для цилиндрической стенки.

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2 r_2}}, \text{ BT/(M·K)}.$$

Если в качестве теплоносителя используются газы, и в их состав входят 3-х и более атомные газы, то суммарный коэффициент теплоотдачи определяется в результате конвекции и излучения

$$\alpha = \alpha^{\kappa} + \alpha^{u3\pi}.$$

8.8.3 Расчет конечной температуры рабочих жидкостей

Выше конечной целью теплового расчета являлось определение площади поверхности нагрева и основных размеров теплообменника для его дальнейшего конструирования. Предположим, что теплообменник уже имеется или по крайней мере спроектирован. В этом случае целью теплового расчета является определение конечных температур рабочих жидкостей. Это – так называемый поверочный расчет.

При решении такой задачи известными являются следующие величины: площадь поверхности нагрева F, коэффициент теплопередачи k, величины W_1 и W_2 и начальные температуры t_1' и t_2' , а искомыми: конечные температуры t_1'' и t_2'' и количество передаваемой теплоты Q.

Прямоток. Выше было показано, что температурный напор изменяется по экспоненциальному закону:

$$\Delta t'' = \Delta t' e^{-mkF}. \tag{8.48}$$

Имея в виду, что

$$m = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}, \quad \Delta t' = t_1' - t_2',$$

и что в конце поверхности нагрева $\Delta t'' = t_1'' - t_2''$, подставим эти значения в уравнение (8.49)

$$\frac{t_1'' - t_2''}{t_1' - t_2'} = e^{-\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)kF}.$$
 (8.49)

Однако это уравнение дает лишь разности температур. Вычтем из «1» обе части уравнения (8.50)

$$1 - \frac{t_1'' - t_2''}{t_1' - t_2'} = 1 - e^{-\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)kF}$$
 (8.50)

ИЛИ

$$(t_{1}'-t_{2}')-(t_{1}''-t_{2}'')=(t_{1}'-t_{2}')\left(1-e^{-\left(\frac{1}{W_{1}}+\frac{1}{W_{2}}\right)kF}\right).$$

$$(t_{1}'-t_{1}'')+(t_{2}''-t_{2}')=(t_{1}'-t_{2}')\left(1-e^{-\left(\frac{1}{W_{1}}+\frac{1}{W_{2}}\right)kF}\right)$$

$$(8.51)$$

Так как

$$t_2'' - t_2' = (t_1' - t_1'') \frac{W_1}{W_2},$$

то подставляя это значение в левую часть уравнения (8.51), получим:

$$(t_{1}' - t_{1}'') + (t_{1}' - t_{1}'') \frac{W_{1}}{W_{2}} = (t_{1}' - t_{2}') \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{W_{1}} + \frac{1}{W_{2}}\right)kF}\right).$$

$$(t_{1}' - t_{1}') = \frac{\left(t_{1}' - t_{2}'\right) \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{W_{1}} + \frac{1}{W_{2}}\right)kF}\right)}{1 + \frac{W_{1}}{W_{2}}}.$$

$$(8.52)$$

Аналогичным образом из уравнения (8.51) можно определить и изменение температуры холодной жидкости. Так как

$$t_1' - t_1'' = (t_2'' - t_2') \frac{W_2}{W_1},$$

получим

$$(t_2'' - t_2') \frac{W_2}{W_1} + (t_2'' - t_2') = (t_1' - t_2') \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)kF} \right)$$

Тогда

$$\delta t_{2} = (t_{2}'' - t_{2}') = \frac{(t_{1}' - t_{2}') \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{W_{1}} + \frac{1}{W_{2}}\right)kF}\right)}{1 + \frac{W_{2}}{W_{1}}},$$

$$\delta t_{2} = (t_{2}'' - t_{2}') = (t_{1}' - t_{2}') \frac{W_{1}}{W_{2}} \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{W_{1}} + \frac{1}{W_{2}}\right)kF}\right)}{1 + \frac{W_{1}}{W_{2}}}.$$

$$(8.53)$$

Конечные температуры горячего и холодного теплоносителей

$$t_1'' = t_1' - \delta t_1, \quad t_2'' = t_2' + \delta t_2.$$
 (8.54)

Количество тепла, передаваемого через поверхность теплообмена

$$Q = W_1 \delta t_1. \tag{8.55}$$

Формулы (12.14)...(12.17) могут быть применены и для расчета промежуточных значений температуры рабочих жидкостей и количества тепла. В этом случае в расчетные формулы вместо F надо подставить значение $F_{\rm x}$.

Противоток. Для противотока расчетные формулы выводятся так же, как и для прямотока.

Температурный напор

$$\Delta t'' = \Delta t' e^{-mkF}; \qquad (8.56)$$

$$m = \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2};$$

$$\Delta t' = t_1' - t_2'', \quad \Delta t'' = t_1'' - t_2'.$$
 (8.57)

$$(t_1' - t_1'')W_1 = (t_2'' - t_2')W_2.$$
 (8.58)

Уравнение (12.18) с учетом (12.19) преобразуем к виду

$$\frac{t_1'' - t_2'}{t_1' - t_2''} = e^{-mkF}. (8.59)$$

Вычтем левую и правую части уравнения (8.59) из «1»

$$1 - \frac{t_1'' - t_2'}{t_1' - t_2''} = 1 - e^{-mkF}$$

ИЛИ

$$(t_1' - t_2'') - (t_1'' - t_2') = (t_1' - t_2'') (1 - e^{-mkF})$$

$$(t_1' - t_1'') - (t_2'' - t_2') = (t_1' - t_2'') (1 - e^{-mkF}).$$

$$(8.60)$$

Из уравнения (8.58) выразим $(t_2'' - t_2')$ и t_2'' и подставим в уравнение (8.60)

$$\begin{split} & \left(t_{1}'-t_{1}''\right)-\left(t_{1}'-t_{1}''\right)\frac{W_{1}}{W_{2}}=t_{1}'\left(1-e^{-mkF}\right)-t_{2}''\left(1-e^{-mkF}\right);\\ & \left(t_{1}'-t_{1}''\right)\left(1-\frac{W_{1}}{W_{2}}\right)=t_{1}'\left(1-e^{-mkF}\right)-\left(t_{2}'+\left(t_{1}'-t_{1}''\right)\frac{W_{1}}{W_{2}}\right)\left(1-e^{-mkF}\right);\\ & \left(t_{1}'-t_{1}''\right)\left(1-\frac{W_{1}}{W_{2}}\right)=t_{1}'\left(1-e^{-mkF}\right)-t_{2}'\left(1-e^{-mkF}\right)-\left(t_{1}'-t_{1}''\right)\frac{W_{1}}{W_{2}}\left(1-e^{-mkF}\right);\\ & \left(t_{1}'-t_{1}''\right)\left(1-\frac{W_{1}}{W_{2}}+\frac{W_{1}}{W_{2}}\left(1-e^{-mkF}\right)\right)=\left(t_{1}'-t_{2}'\right)\left(1-e^{-mkF}\right);\\ & \left(t_{1}'-t_{1}''\right)\left(1-\frac{W_{1}}{W_{2}}e^{-mkF}\right)=\left(t_{1}'-t_{2}'\right)\left(1-e^{-mkF}\right); \end{split}$$

$$\delta t_1 = t_1' - t_1'' = (t_1' - t_2') \frac{(1 - e^{-mkF})}{1 - \frac{W_1}{W_2} e^{-mkF}}.$$

Для холодного теплоносителя из уравнения (8.58) выражаем $(t_1'-t_1'')$ и t_2''

$$\begin{split} & \left(t_{2}''-t_{2}'\right)\frac{W_{2}}{W_{1}}-\left(t_{2}''-t_{2}'\right)=t_{1}'\left(1-e^{-mkF}\right)-t_{2}''\left(1-e^{-mkF}\right);\\ & \left(t_{2}''-t_{2}'\right)\left(\frac{W_{2}}{W_{1}}-1\right)=t_{1}'\left(1-e^{-mkF}\right)-\left(\underbrace{\left(t_{1}'-t_{1}''\right)\frac{W_{1}}{W_{2}}}_{t_{2}''-t_{2}'}+t_{2}'\right)\left(1-e^{-mkF}\right);\\ & \left(t_{2}''-t_{2}'\right)\left(\frac{W_{2}}{W_{1}}-1+1-e^{-mkF}\right)=\left(t_{1}'-t_{2}'\right)\left(1-e^{-mkF}\right);\\ & \left(t_{2}''-t_{2}'\right)\left(1-\frac{W_{1}}{W_{2}}e^{-mkF}\right)\frac{W_{2}}{W_{1}}=\left(t_{1}'-t_{2}'\right)\left(1-e^{-mkF}\right)\\ & \delta t_{2}=t_{2}''-t_{2}'=\left(t_{1}'-t_{2}'\right)\frac{W_{1}}{W_{2}}\frac{\left(1-e^{-mkF}\right)}{1-\frac{W_{1}}{W_{2}}e^{-mkF}}. \end{split}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Беляев Н.М. Основы теплопередачи: учебник. К.: «Вища шк.», 1989. 343 с.
- 2. Борисов В.Т. Теория двухфазной зоны. М.: Металлургия, 1987.-224 с.
- 3. Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. - 688 с.
- 4. Бокштейн Е.С. Диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1978 246 с.
- 5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- 6. Гребер Г. Основы учения о теплообмене М.: Изд. ин. Лит. 1958. -566 с.
- 7. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. М.: Высш. шк.., 1963. -254 с.
- 8. Джордейн Р. Справочник программиста персональных компьютеров типа IBM PC, XT и AT. М.: Финансы и статистика, 1992. 544 с.
- 9. Джалурия Й. Естественная конвекция. М.: Мир, 1983. 400с.
- 10. Де Гроот С.Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
- 11. Де Гроот С.Р. Термодинамика неравновесных процессов. М.: Технико-теор.лит., 1956. 280 с.
- 12. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 304 с.
- 13. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. М.: Высш. шк., 1990. 207 с.
- 14. Емельянов В.А. Тепловая работа машин непрерывного литья заготовок. М.: Металлургия, 1988. -143 с.
- 15.Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 416 с.
- 16. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1969. 440 с.
- 17. Иодко Э.А., Шкляр В.С. Моделирование тепловых процессов в металлургии. М.: Металлургия, 1969. 167с.
- 18. Казанцев Е.И. Промышленные печи. М.: Металлургия, 1975. 368 с.

- 19. Коздоба Л.А. Решение нелинейных задач теплопроводности. Киев: Наук. Думка, 1976. – 136 с.
- 20. Кетлов Ю.Л. GW-, Quik Basic для IBM PC. М.: Финансы и статистика, 1992. 240 с.
- 21. Краснощеков Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче. Учебное пособие для вузов. М.: Энергия, 1980. 288 с.
- 22. Кривандин В.А., Егоров А.В. Тепловая работа и конструкции печей черной металлугии. М.: Металлургия, 1989. 463 с.
- 23. Кутателадзе С.С. Анализ подобия в теплофизике. Новосибирск: Наука, 1982. 280 с
- 24. Кутателадзе С.С. Анализ подобия и физические модели. Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с
- 25. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 195 с.
- 26. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. –736 с.
- 27. Лисиенко В.Г. Теплофизика металлургических процессов. М.: Металлургия, 1982. 166 с.
- 28. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- 29. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Энергия, 1967. 389 с.
- 30. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.: Госэнергоиздат, 1963. 535 с.
- 31. Мастрюков Б.С. Теория, конструкция и расчеты металлургических печей. М.: Металлургия, 1996. 256 с.
- 32. Металлургическая теплотехника. В 2х томах, т.1/Кривандин В.А., Арутюнов В.А., Мастрюков Б.С. и др. М.: Металлургия, 1986. 424 с.
- 33. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
- 34. Недопёкин Ф. В. Теория тепломассопереноса: Учеб. пособие. – Донецк: Дон ГУ, 1991. – 172 с.
- 35. Недопёкин Ф. В., Калюжный Г. С., Коваленко А. А., Соколов В. И. Диффузионные процессы в стационарных газовых потоках: Учебное пособие // Луганск:Из-во Восточноукраинского национального университета им. В.Даля, 2004. 160с.

- 36. Недопёкин Ф. В., Ступин А. Б. Феноменологическая и статистическая теория неравновесных процессов: учебное пособие // Донецк: ДонНУ, 2006. 119 с.
- 37. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
- 38. Огурцов А. П., Недопёкин Ф. В., Толстых В. К., Володин Н. А. Прямая оптимизация технологических процессов // Донецк: Юго-Восток, 1997. -160 с.
- 39.Повх И.Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении. Л.: Машиностроение, 1974. 480 с.
- 40. Прихожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: Иностр. лит., 1960. 127 с.
- 41. Рутес В.С. Теория непрерывной разливки стали. М.: Металлургия, 1971, 296 с.
- 42. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
- 43. Szekely J. Fluid flow phenomena in metal processing. New York: Academic Press, 1979. 437p.
- 44. Тайц Н.Ю. Расчёты нагревательных печей. К.: Техника 1969. 540 с.
- 45. Теория тепломассообмена / Под ред.. А.И. Леонтьева. М.: Высш. шк., 1979. 416c.
- 46. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
- 47. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло-массообмена. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. 680 с.
- 48. Эйгенсон Л.С. Моделирование. М.: Наука, 1952. 372 с.
- 49.Юзов О.В., Харитонова Н.А. Эффективность охраны атмосферы от выбросов сталеплавильного производства. М.: Металлургия, 1987. 103с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 – Физические свойства веществ

Таблица П-1 — Физические свойства сухого воздуха (B=760 мм рт. ст. \approx 101000 Па)

	ρ ,	c_{p} ,	$\lambda \cdot 10^2$,	$a.10^6$	μ ·10 ⁶ ,	$v10^6$,	D
t, °C	$\kappa\Gamma/M^3$	кДж/(кг·К)	Вт/(м·К)	m^2/c	Па•с	m^2/c	Pr
-50	1,584	1,013	2,04	12,7	14,6	9,2	0,728
-40	1,515	1,013	2,12	13,8	15,2	10,0	0,726
-30	1,463	1,013	2,20	14,9	15,7	10,8	0,723
-20	1,395	1,009	2,28	16,2	16,2	11,6	0,716
-10	1,342	1,009	2,36	17,4	16,7	12,4	0,712
0	1,293	1,005	2,44	18,8	17,2	13,2	0,707
10	1,247	1,005	2,51	20,0	17,6	14,1	0,705
20	1,205	1,005	2,59	21,4	18,1	15,0	0,703
30	1,165	1,005	2,67	22,9	18,6	16,0	0,701
40	1,128	1,005	2,76	24,3	19,1	16,9	0,699
50	1,093	1,005	2,83	25,7	19,6	17,9	0,698
60	1,060	1,005	2,90	27,2	20,1	18,9	0,696
70	1,029	1,009	2,96	28,6	20,6	20,0	0,694
80	1,000	1,009	3,05	30,2	21,1	21,0	0,692
90	0,972	1,009	3,13	31,9	21,5	22,1	0,690
100	0,946	1,009	3,21	33,6	21,9	23,1	0,688
120	0,898	1,009	3,34	36,8	22,8	25,4	0,686
140	0,854	1,013	3,49	40,3	23,7	27,8	0,684
160	0,815	1,017	3,64	43,9	24,5	30,0	0,682
180	0,779	1,022	3,78	47,5	25,3	32,4	0,681
200	0,746	1,026	3,93	51,4	26,0	34,8	0,680
250	0,674	1,038	4,27	61,0	27,4	40,6	0,677
300	0,615	1,047	4,60	71,6	29,7	48,3	0,674
350	0,566	1,059	4,91	81,9	31,4	55,4	0,676
400	0,524	1,068	5,21	93,1	33,0	63,0	0,678
500	0,456	1,093	5,74	115,3	36,2	79,3	0,687
600	0,404	1,114	6,22	138,3	39,1	96,8	0,699
700	0,362	1,135	6,71	163,4	41,8	115,4	0,706
800	0,329	1,156	7,18	188,8	44,3	134,8	0,713
900	0,301	1,172	7,63	216,2	46,7	155,1	0,717
1000	0,277	1,185	8,07	245,9	49,0	177,1	0,719
1100	0,257	1,197	8,50	276,2	51,2	199,3	0,722
1200	0,259	1,210	9,15	316,5	53,5	233,7	0,724

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 (продолжение) Таблица П-2 — Физические свойства воды на лини насыщения

	1									1	
				\mathfrak{D}							
	_			<i>с</i> _р , кДж/(кг [.] К)	$\overline{\Sigma}$	့ပ	့	ွပ	<i>></i>	M	
	Па	A ³	і, кДж/кг	ж/(Вт/(м·К)	$a.10^{8}, \mathrm{m^{2}/c}$	µ·10 ⁶ , Па·с	$v10^6$, m^2/c	β ·10 ⁴ , 1/K	σ ·10 ⁴ , H/M	
Ç	$p.10^{-5}$	ρ , k Γ/M^3	Дж	KŢ	Вт/	0^{8}	0^{6}	0^6	0^{4}	0^4 ,	
t, °(2.1), k	', K,	2,	Α,	1.1	<u> </u>	7.	3.1	9.1	Pr
0	1,013	999,9	0	4,212	0,560	13,2	1788	1,789	-0,63	756,4	13,5
10	1,013	999,7	42,04	4,191	0,580	13,8	1306	1,306	+0,70	741,6	9,45
20	1,013	998,2	83,91	4,183	0,597	14,3	1004	1,006	1,82	726,9	7,03
30	1,013	995,7	125,7	4,174	0,612	14,7	801,5	0,805	3,21	712,2	5,45
40	1,013	992,2	167,5	4,174	0,627	15,1	653,3	0,659	3,87	696,5	4,36
50	1,013	988,1	209,3	4,174	0,640	15,5	549,4	0,556	4,49	676,9	3,5
60	1,013	983,1	251,1	4,179	0,650	15,8	469,9	0,478	5,11	662,2	3,03
70	1,013	977,8	293,0	4,187	0,662	16,1	406,1	0,415	5,70	643,5	2,58
80	1,013	971,8	335,0	4,195	0,669	16,3	355,1	0,365	6,32	625,9	2,23
90	1,013	965,3	377,0	4,208	0,676	16,5	314,9	0,326	6,95	607,2	1,97
100	1,013	958,4	419,1	4,220	0,684	16,8	282,5	0,295	7,52	588,6	1,75
110 120	1,43 1,98	951,0 943,1	461,4 503,7	4,233 4,250	0,685 0,686	17,0 17,1	259,0 237,4	0,272 0,252	8,08 8,64	569,0 548,4	1,60 1,47
130	2,70	934,8	546,4	4,266	0,686	17,1	217,8	0,232	9,19	528,8	1,35
140	3,61	926,1	589,1	4,287	0,685	17,3	201,1	0,233	9,72	507,2	1,26
150	4,76	917,0	632,2	4,313	0,684	17,3	186,4	0,203	10,3	486,6	1,17
160	6,18	907,4	675,4	4,346	0,681	17,8	173,6	0,191	10,7	466,0	1,10
170	7,92	897,3	719,3	4,380	0,676	17,2	162,8	0,181	11,3	443,4	1,05
180	10,03	886,9	763,3	4,417	0,672	17,2	153,0	0,173	11,9	422,8	1,03
190	12,55	876,0	807,8	4,459	0,664	17,2	144,2	0,165	12,6	400,2	0,965
200	15,55	863,0	852,5	4,505	0,658	17,0	136,4	0,158	13,3	376,7	0,932
210	19,08	852,8	897,7	4,555	0,649	16,7	130,5	0,153	14,1	354,1	0,915
220	23,20	840,3	943,7	4,614	0,640	16,5	124,6	0,148	14,8	331,6	0,898
230	27,98	827,3	990,2	4,681	0,629	16,3	119,7	0,145	15,9	310,0	0,888
240	33,48	813,6	1037,5	4,76	0,617	16,0	114,8	0,141	16,8	285,5	0,883
250	39,78	799,0	1085,7	4,87	0,605	15,5	109,0	0,137	18,1	261,9	0,884
260 270	46,94 55,05	784,0 767,9	1135,7 1185,3	4,98 5,12	0,593 0,578	15,2 14,7	105,9 102,0	0,135 0,133	19,7 21,6	237,4 214,8	0,892 0,905
280	64,19	750,7	1236,8	5,30	0,578	14,7	98,1	0,133	23,7	191,3	0,903
290	74,45	732,3	1290,0	5,50	0,548	13,7	94,2	0,131	26,2	168,7	0,944
300	85,92	712,5	1344,9	5,76	0,532	13,0	91,2	0,128	29,2	144,2	0,986
310	98,70	691,1	1402,2	6,11	0,514	12,2	88,3	0,128	32,9	120,7	1,05
320	112,90	667,1	1462,1	6,57	0,494	11,3	85,3	0,128	38,2	98,10	1,14
330	128,65	640,2	1526,2	7,25	0,471	10,2	81,4	0,127	43,3	76,71	1,25
340	146,08	610,1	1594,8	8,20	0,446	8,9	77,5	0,127	53,4	56,70	1,42
350	165,37	574,4	1671,4	10,10	0,431	7,90	72,6	0,126	66,8	38,16	1,70
360	186,74	528,0	1761,5	14,65	0,367	4,2	66,7	0,126	109	20,21	2,66
370	210,53	450,5	1892,5	40,32	0,338	1,85	56,9	0,126	264	4,709	6,80

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 (продолжение)

Таблица П-3 – Физические свойства водяного пара на линии насыщения

t, °C	<i>p</i> ·10 ⁻⁵ , Па	ρ , ke/m ³	і`, кДж/кг	г, кДж/кг	<i>с</i> р, кДж/(кг·К)	λ 10², Βτ/(м·Κ)	$a \cdot 10^8$, M^2/c	μ·10 ⁶ , Πa·c	$v10^6, \text{M}^2/\text{c}$	Pr
100	1,013	0,598	2675,9	2256,8	2,135	2,372	18,58	11,97	20,02	1,08
110	1,43	0,826	2691,4	2230,0	2,177	2,489	13,83	12,46	15,07	1,09
120	1,98	1,121	2706,5	2202,8	2,206	2,593	10,50	12,85	11,46	1,09
130	2,70	1,496	2720,7	2174,3	2,257	2,686	7,972	13,24	8,85	1,11
140	3,61	1,966	2734,1	2145,0	2,315	2,791	6,130	13,54	6,89	1,12
150	4,76	2,547	2746,7	2114,3	2,395	2,884	4,728	13,93	5,47	1,16
160	6,18	3,258	2758,0	2082,6	2,479	3,012	3,722	14,32	4,39	1,18
170	7,92	4,122	2768,9	2049,5	2,583	3,127	2,939	14,72	3,57	1,21
180	10,03	5,157	2778,5	2015,2	2,709	3,268	2,339	15,11	2,93	1,25
190	12,55	6,397	2786,4	1978,8	2,856	3,419	1,872	15,60	2,44	1,30
200	15,55	7,862	2793,1	1940,7	3,023	3,547	1,492	15,99	2,03	1,36
210	19,08	9,588	2798,2	1900,5	3,199	3,722	1,214	16,38	1,71	1,41
220	23,20	11,62	2801,5	1857,8	3,408	3,896	0,983	16,87	1,45	1,47
230	27,98	13,99	2803,2	1813,0	3,634	4,094	0,806	17,36	1,24	1,54
240	33,48	16,76	2803,0	1766	3,881	4,290	0,658	17,75	1,06	1,61
250	39,78	19,98	2801	1716	4,157	4,515	0,544	18,24	0,913	1,68
260	46,94	23,72	2796	1661	4,467	4,800	0,453	18,83	0,794	1,75
270	55,05	28,09	2709	1604	4,815	5,115	0,378	19,32	0,688	1,82
280	64,19	33,19	2780	1543	5,234	5,490	0,317	19,91	0,600	1,90
290	74,45	39,15	2766	1476	5,694	5,830	0,261	20,59	0,526	2,01
300	85,92	46,21	2749	1404	6,280	6,270	0,216	21,28	0,461	2,13
310	98,70	54,58	2727	1325	7,118	6,840	0,176	21,97	0,403	2,29
320	112,90	64,72	2700	1238	8,206	7,510	0,141	22,85	0,353	2,50
330	128,65	77,10	2666	1140	9,881	8,260	0,108	23,93	0,310	2,86
340	146,08	92,76	2622	1027	12,35	9,300	0,0811	25,20	0,272	3,35
350	165,37	113,6	2564	893	16,24	10,700	0,0581	26,58	0,238	4,03
360	186,74	144,0	2481	719,7	23,03	12,790	0,0386	29,13	0,202	5,23
370	210,53	203,0	2331	438,4	56,52	17,100	0,0150	33,73	0,166	11,10

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 (продолжение)

Таблица П-4 — Физические свойства дымовых газов (B=760 мм рт. ст. \approx 1,01·10⁵ Па; \overline{p}_{CO_2} = 0,13; \overline{p}_{H_2O} = 0,11; \overline{p}_{N_2} = 0,76)

t, °C	ρ ,	c_{p} ,	$\lambda \cdot 10^2$,	$a.10^{6}$	$\mu^{1}10^{6}$,	$v 10^6$,	Pr
ι, τ	$\kappa\Gamma/M^3$	кДж/(кг·К)	Вт/(м·К)	m^2/c	Па·с	m^2/c	Γ/
0	1,295	1,042	2,28	16,9	15,8	12,20	0,72
100	0,950	1,068	3,13	30,8	20,4	21,54	0,69
200	0,748	1,097	4,01	48,9	24,5	32,80	0,67
300	0,617	1,122	4,84	69,9	28,2	45,81	0,65
400	0,525	1,151	5,70	94,3	31,7	60,38	0,64
500	0,457	1,185	6,56	121,1	34,8	76,30	0,63
600	0,405	1,214	7,42	150,9	37,9	93,61	0,62
700	0,363	1,239	8,27	183,8	40,7	112,1	0,61
800	0,330	1,264	9,15	219,7	43,4	131,8	0,60
900	0,301	1,290	10,0	258,0	45,9	152,5	0,59
1000	0,275	1,306	10,90	303,4	48,4	174,3	0,58
1100	0,257	1,323	11,75	345,5	50,7	197,1	0,57
1200	0,240	1,340	12,62	392,4	53,0	221,0	0,56

Таблица П-5 — Физические свойства трансформаторного масла в зависимости от температуры

4 °C	ρ,	c_{p} ,	λ,	$\mu \cdot 10^4$,	$v10^{6}$,	$a.10^{8}$	$\beta \cdot 10^4$,	D.,
t, °C	$\kappa \Gamma / M^3$	кДж/(кг·К)	Вт/(м·К)	Па•с	m^2/c	m^2/c	K ⁻¹	Pr
0,0	892,5	1,549	0,1123	629,8	70,5	8,14	6,80	866
10	886,4	1,620	0,1115	335,5	37,9	7,83	6,85	484
20	880,3	1,666	0,1106	198,2	22,5	7,56	6,90	298
30	874,2	1,729	0,1008	128,5	14,7	7,28	6,95	202
40	868,2	1,788	0,1090	89,4	10,3	7,03	7,00	146
50	862,1	1,846	0,1082	65,3	7,58	6,80	7,05	111
60	856,0	1,905	0,1072	49,5	5,78	6,58	7,10	87,8
70	850,0	1,964	0,1064	38,6	4,54	6,36	7,15	71,3
80	843,9	2,026	0,1056	30,8	3,66	6,17	7,20	59,3
90	837,8	2,085	0,1047	25,4	3,03	6,00	7,25	50,5
100	831,8	2,144	0,1038	21,3	2,56	5,83	7,30	43,9
110	825,7	2,202	0,1030	18,1	2,20	5,67	7,35	38,8
120	819,6	2,261	0,1022	15,7	1,92	5,50	7,40	34,4

Таблица П-6 – Физические свойства масла MC-20 в зависимости от температуры

			Trep wrj p br					
t, °C	ρ ,	$c_{ m p},$	λ,	$\mu^{1}10^{4}$,	$v10^{6}$,	$a.10^{8}$	$\beta \cdot 10^4$,	Pr
ι, τ	$\kappa\Gamma/M^3$	кДж/(кг·К)	Вт/(м·К)	Па•с	m^2/c	m^2/c	K ⁻¹	1 /
-10	990,3	1,951	0,136	_	_	7,75	6,24	_
0	903,6	1,980	0,135	_	_	7,58	6,24	_
+10	897,9	2,010	0,135	_	_	7,44	6,31	_
20	892,3	2,043	0,134	10026	1125	7,30	6,35	15400
30	886,6	2,072	0,132	4670	526	7,19	6,38	7310
40	881,0	2,106	0,131	2443	276	7,08	6,42	3890
50	875,3	2,135	0,130	1334	153	7,00	6,46	2180
60	869,6	2,165	0,129	798,5	91,9	6,86	6,51	1340
70	864,0	2,198	0,128	498,3	58,4	6,75	6,55	865
80	858,3	2,227	0,127	336,5	39,2	6,67	6,60	588
90	852,7	2,261	0,126	234,4	27,5	6,56	6,64	420
100	847,0	2,290	0,126	171,7	20,3	6,44	6,69	315
110	841,3	2,320	0,124	132,4	15,7	6,36	6,73	247
120	835,7	2,353	0,123	101,0	12,1	6,25	6,77	193
130	830,0	2,382	0,122	79,76	9,61	6,17	6,82	156
140	824,4	2,420	0,121	61,80	7,50	6,08	6,87	123
150	818,7	2,445	0,120	53,17	6,50	6,00	6,92	108

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 – Теплофизические свойства углеро- дистых сталей

Таблица П-1 – Коэффициент теплопроводности, Bт/(м·K) углеродистых сталей различных марок в зависимости то температуры

Температура,	<u>F</u>		-	арка стал		<u> </u>	
°C	08кп	08	20	40	У8	У8'	У12
0	65,1	59,5	51,9	51,9	49,8	51,1	45,2
50	62,8	58,6	51,5	51,5	49,4	50,2	45,2
100	60,2	57,7	51,1	50,6	48,1	48,9	44,8
150	57,7	55,2	49,9	49,8	46,9	47,7	42,7
200	55,6	53,5	48,5	48,1	45,1	46,1	42,4
250	53,0	51,5	46,5	46,9	43,0	43,9	41,1
300	50,9	49,4	44,4	45,6	41,4	41,9	40,2
350	48,5	47,7	43,6	44,3	40,2	40,2	38,5
400	46,5	44,8	42,7	41,9	38,1	37,6	37,2
450	43,5	42,3	41,1	40,0	36,4	36,9	36,1
500	41,1	40,2	39,3	38,1	35,2	35,6	34,7
550	39,4	38,1	37,7	36,1	33,9	34,4	33,5
600	37,4	36,1	35,6	33,6	32,7	33,3	31,9
650	36,1	33,9	33,9	31,9	31,4	31,9	30,0
700	33,9	31,9	31,9	30,0	30,1	30,7	28,3
750	31,9	29,8	28,5	26,9	26,9	27,3	26,9
800	30,1	28,5	25,9	24,8	24,3	24,3	23,7
850	27,7	27,2	25,9	24,8	24,3	24,3	23,7
900	27,2	26,7	26,4	25,7	25,7	25,2	24,8
950	27,2	27,2	27,2	26,1	26,5	26,1	25,7
1000	27,7	27,7	27,7	26,9	26,9	26,9	26,1
1050	28,0	28,0	28,0	27,2	27,7	27,7	26,9
1100	28,5	28,5	28,5	28,0	28,6	28,6	27,2
1150	29,3	29,3	29,3	28,7	29,4	28,7	28,0
1200	29,8	29,8	29,8	29,5	30,2	29,5	28,6

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 (продолжение)

Таблица П-2 — Средняя теплоемкость $c_{\rm cp}$, кДж/(кг·К), углеродистых сталей различных марок в интервале температур от 50 до t °C

		•		Марка ст				
Температура,								
°C	Чистое							
	железо	08кп	08	20	40	У8	У8'	У12
	(99,99%)							
100	0,469	0,486	0,486	0,486	0,486	0,486	0,502	0,486
150	0,477	0,494	0,494	0,494	0,494	0,502	0,511	0,502
200	0,489	0,502	0,502	0,502	0,498	0,515	0,523	0,515
250	0,498	0,511	0,511	0,511	0,507	0,523	0,523	0,523
300	0,511	0,519	0,519	0,519	0,515	0,532	0,519	0,532
350	0,519	0,528	0,528	0,528	0,523	0,540	0,544	0,540
400	0,528	0,536	0,540	0,540	0,532	0,548	0,553	0,544
450	0,536	0,548	0,548	0,548	0,544	0,557	0,565	0,557
500	0,553	0,561	0,561	0,561	0,557	0,589	0,574	0,565
550	0,561	0,574	0,578	0,574	0,569	0,582	0,586	0,578
600	0,578	0,590	0,590	0,590	0,582	0,595	0,603	0,586
650	0,595	0,611	0,607	0,607	0,595	0,603	0,615	0,599
700	0,615	0,628	0,628	0,628	0,607	0,619	0,632	0,615
750	0,641	0,645	0,662	0,669	0,678	0,724	0,745	0,720
800	0,657	0,678	0,682	0,703	0,674	0,716	0,737	0,716
850	0,666	0,682	0,695	0,703	0,662	0,712	0,729	0,712
900	0,666	0,695	0,703	0,703	0,657	0,708	0,724	0,708
950	0,682	0,691	0,709	0,699	0,653	0,703	0,716	0,703
1000	0,678	0,691	0,695	0,695	0,653	0,699	0,712	0,699
1050	0,669	0,691	0,695	0,691	0,653	0,695	0,708	0,695
1100	0,666	0,691	0,695	0,691	0,649	0,695	0,703	0,695
1150	0,666	0,687	0,691	0,691	0,649	0,691	0,707	0,691
1200	0,666	0,687	0,691	0,687	0,649	0,691	0,699	0,691
1250	0,662	0,687	0,691	0,687	0,653	0,691	0,699	0,691
1300	0,662	0,699	0,687	0,687	0,653	0,691	0,699	0,687

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 (продолжение) Таблица П-3 — Средняя теплоемкость $c_{\rm cp}$, кДж/(кг·К), углеродистых сталей

Интервал	Чистое			M	Гарка ста.	пи		
температур, °С	железо (99,99%)	08кп	08	20	40	У8	У8'	У12
50–100	0,469	0,481	0,481	0,486	0,486	0,489	0,498	0,486
100–150	0,489	0,502	0,502	0,507	0,502	0,519	0,523	0,519
150–200	0,511	0,519	0,523	0,519	0,515	0,532	0,544	0,540
200–250	0,528	0,536	0,544	0,532	0,528	0,548	0,548	0,544
250–300	0,544	0,553	0,557	0,557	0,548	0,565	0,565	0,557
300–350	0,565	0,574	0,569	0,574	0,569	0,586	0,552	0,578
350–400	0,586	0,595	0,595	0,599	0,586	0,607	0,603	0,599
400–450	0,611	0,624	0,624	0,624	0,611	0,628	0,632	0,615
450–500	0,649	0,662	0,662	0,662	0,649	0,669	0,666	0,636
500-550	0,691	0,708	0,695	0,703	0,691	0,695	0,708	0,662
550–600	0,733	0,754	0,741	0,749	0,708	0,716	0,749	0,699
600–650	0,775	0,799	0,791	0,787	0,733	0,720	0,779	0,745
650–700	0,829	0,867	0,858	0,846	0,770	0,770	0,833	0,816
700–750	0,971	1,105	1,139	1,432	1,583	2,081	2,186	2,089
750–800	0,913	0,875	0,959	0,950	0,624	0,615	0,632	0,649
800–850	0,754	0,795	0,867	0,737	0,502	0,657	0,619	0,657
850–900	0,716	0,849	0,816	0,649	0,548	0,619	0,619	0,619
900–950	0,946	0,662	0,649	0,649	0,624	0,624	0,619	0,619
950–1000	0,557	0,669	0,657	0,649	0,624	0,632	0,615	0,628
1000–1050	0,582	0,669	0,657	0,649	0,632	0,645	0,628	0,636
1050-1100	0,599	0,669	0,662	0,649	0,632	0,653	0,636	0,641
1100–1150	0,615	0,669	0,662	0,657	0,641	0,662	0,653	0,649
1150–1200	0,632	0,669	0,666	0,666	0,653	0,669	0,669	0,657
1200–1250	0,649	0,669	0,666	0,678	0,669	0,678	0,678	0,666
1250–1300	0,669	0,669	0,666	0,687	0,687	0,678	0,695	0,674

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 (продолжение) Таблица Π -4 — Удельная энтальпия углеродистых сталей i, кДж/кг

Тиолици		цельная энтальния углеродистых сталеи <i>і</i> , кдж/кг								
Температура,	Чистое			M	арка ста.	ЛИ				
°C	железо	08кп	08	20	40	У8	У8'	У12		
100	46,89	48,57	48,57	48,56	48,57	48,57	50,24	48,57		
150	71,59	74,11	74,11	74,11	74,11	75,36	76,62	75,36		
200	97,97	100,48	100,48	100,48	99,65	102,99	104,67	102,99		
250	124,56	127,69	127,69	127,69	126,65	130,84	130,84	130,84		
300	153,24	175,55	155,75	155,75	154,49	159,52	155,75	159,52		
350	181,71	184,64	184,64	184,64	183,17	189,03	190,49	189,03		
400	211,01	214,36	216,04	216,04	212,69	219,39	221,06	217,72		
450	241,16	246,81	246,81	246,81	244,93	250,58	254,35	250,58		
500	276,33	280,52	280,52	280,52	278,42	284,70	286,79	282,61		
550	308,57	315,48	317,48	315,48	313,17	320,08	322,38	317,78		
600	367,67	354,20	354,20	354,20	349,18	356,72	361,74	351,69		
650	386,44	397,33	394,61	394,61	386,44	391,88	400,05	389,16		
700	430,82	439,61	439,61	439,61	424,96	433,75	442,54	430,82		
750	480,44	483,58	496,14	502,42	508,59	543,24	558,94	540,09		
800	525,86	542,61	545,96	562,71	539,26	572,75	589,50	572,75		
850	565,85	580,08	590,76	597,88	562,29	604,99	619,23	604,99		
900	599,13	625,51	633,04	633,04	591,59	636,81	651,88	636,81		
950	648,33	656,28	664,24	664,24	620,48	668,28	680,15	668,21		
1000	678,60	690,82	698,00	695,00	653,14	699,19	711,76	699,19		
1050	703,38	709,90	729,76	725,36	685,70	729,76	742,95	729,76		
1100	732,27	725,36	764,51	759,90	713,85	764,51	773,72	764,51		
1150	769,74	789,63	794,45	794,45	746,29	794,45	808,89	794,45		
1200	798,84	823,96	828,99	823,96	778,74	828,99	839,03	828,99		
1250	826,89	858,29	863,53	858,29	816,43	863,63	873,99	863,83		
1300	859,97	908,95	892,63	892,63	849,08	898,07	908,95	892,63		

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 (продолжение)

Таблица П-5 — Плотность углеродистых сталей ρ , г/см³

Температура,		иность утл	•	а стали		
°C	08кп	08	20	40	У8	У12
0	7,876	7,861	7,863	7,858	7,855	7,834
15	7,871	7,856	7,859	7,854	7,851	7,830
50	7,861	7,847	7,849	7,845	7,842	7,822
100	7,846	7,832	7,834	7,832	7,829	7,809
150	7,830	7,846	7,819	7,817	7,815	7,796
200	7,814	7,800	7,803	7,801	7,800	7,781
250	7,798	7,783	7,787	7,784	7,784	7,765
300	7,781	7,765	7,770	7,766	7,767	7,749
350	7,763	7,748	7,753	7,748	7,749	7,731
400	7,745	7,730	7,736	7,730	7,731	7,713
450	7,727	7,711	7,718	7,711	7,713	7,694
500	7,708	7,692	7,699	7,692	7,694	7,675
550	7,688	7,673	7,679	7,672	7,675	7,655
600	7,668	7,653	7,659	7,652	7,655	7,634
650	7,648	7,632	7,635	7,628	7,632	7,613
700	7,628	7,613	7,617	7,613	7,612	7,592
750	7,610	7,594	7,620	7,624	7,604	7,581
800	7,598	7,582	7,624	7,635	7,594	7,565
850	7,601	7,589	7,616	7,617	7,565	7,528
900	7,602	7,594	7,600	7,590	7,533	7,489
950	7,580	7,572	7,574	7,564	7,509	7,463
1000	7,550	7,543	7,548	7,538	7,485	7,438
1050	7,523	7,515	7,522	7,512	7,460	7,413
1100	7,495	7,488	7,496	7,486	7,436	7,388